



# Invariants de type fini des cylindres d'homologie et des string links

Jean-Baptiste Meilhan

## ► To cite this version:

Jean-Baptiste Meilhan. Invariants de type fini des cylindres d'homologie et des string links. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2003. Français. NNT: . tel-00004184

**HAL Id: tel-00004184**

**<https://theses.hal.science/tel-00004184>**

Submitted on 15 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATERIAUX

Année : 2003

N° B.U. :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Jean-Baptiste MEILHAN**

*le 19 Décembre 2003*

*à l'Université de Nantes*

Titre

INVARIANTS DE TYPE FINI DES  
CYLINDRES D'HOMOLOGIE ET DES  
STRING-LINKS

Jury

Président	:	Pierre VOGEL	Professeur (Paris VII)
Rapporteurs	:	Thomas FIEDLER	Professeur (Toulouse III)
		Gregor MASBAUM	C.R. du CNRS (Paris VII)
Examineurs	:	Christian BLANCHET	Professeur (Bretagne-Sud)
		Sylvain GERVAIS	Maître de Conférences (Nantes)
		Nathan HABEGGER	Professeur (Nantes)
		François LAUDENBACH	Professeur (Nantes)
		Michael POLYAK	Professeur (Haifa)

**Directeur de Thèse : Nathan HABEGGER**

Laboratoire : Jean Leray (UMR 6629 CNRS/UN)

Composante : Faculté des Sciences et Techniques N° E.D. :



## Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde et sincère reconnaissance envers Nathan Habegger, pour m'avoir toujours accordé sa confiance et pour m'avoir guidé avec enthousiasme tout au long de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier Thomas Fiedler pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour ses commentaires. De même, je remercie Gregor Masbaum pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail, et pour sa présence dans le jury.

Christian Blanchet, Sylvain Gervais, François Laudénbach et Pierre Vogel ont accepté de faire partie de ce jury. Je les en remercie, ainsi que pour l'attention que chacun d'entre eux a prêté à mon travail au cours de ces années.

Cette thèse n'a véritablement commencé qu'au printemps 2001, lors d'un stage à l'université de Tel-Aviv. Je remercie Michael Polyak de m'avoir offert cette possibilité et pour les nombreuses conversations que nous avons eu pendant ce séjour ; je le remercie encore pour être venu se joindre au jury.

Je remercie aussi mes amis, au nombre desquels les thésards de Nantes, grâce auxquels cette période me laissera un si excellent souvenir. Je remercie en particulier mon co-auteur, Gwénaél Massuyeau ; notre collaboration fut une très sympathique expérience.

Enfin, mes pensées vont à Marie, et aux membres de nos deux (notre ?) familles ; votre constant soutien et votre affection, votre curiosité aussi, me furent extrêmement précieux.

*à Jean et à Eric...*



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la théorie des claspers de Goussarov-Habiro</b>	<b>12</b>
1.1	Qu'est-ce qu'un clasper ? . . . . .	12
1.1.1	Définitions et conventions . . . . .	12
1.1.2	Chirurgie le long d'un clasper . . . . .	14
1.1.3	Calcul de claspers . . . . .	16
1.2	Relations d'équivalence chirurgicale issues des claspers . . . . .	18
1.2.1	$C_k$ -équivalence pour les entrelacs . . . . .	19
1.2.2	$Y_k$ -équivalence pour les 3-variétés avec entrelacs . . . . .	20
1.3	Invariants de type fini et claspers . . . . .	22
1.3.1	Invariants de Vassiliev et claspers . . . . .	22
1.3.2	Théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro pour les 3-variétés . . . . .	24
1.4	Lemmes techniques sur les arbres de clasper . . . . .	25
1.4.1	Lemmes sur les arbres stricts . . . . .	25
1.4.2	Lemmes sur les arbres acceptables . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Cylindres d'homologie et string-links</b>	<b>30</b>
2.1	Cylindres d'homologie . . . . .	30
2.1.1	Définitions et notations . . . . .	30
2.1.2	$Y_k$ -équivalence pour les cylindres d'homologie . . . . .	31
2.1.3	$Y_2$ -équivalence pour les cylindres sur une surface avec au plus une composante de bord . . . . .	33
2.1.4	$Y_2$ -équivalence pour les cylindres sur une surface avec plus d'une composante de bord . . . . .	36
2.2	String-links . . . . .	36
2.2.1	Définitions et notations . . . . .	36
2.2.2	$Y_k$ -équivalence pour les string-links framés des boules d'homologie . . . . .	39
2.2.3	$C_k$ -équivalence pour les string-links . . . . .	41
2.3	$Y$ -équivalence pour les cylindres d'homologie et les string-links	43
2.3.1	Démonstration de la proposition 2.14 . . . . .	43
2.3.2	Démonstration de la proposition 2.3 . . . . .	44
2.3.3	Démonstration de la proposition 2.4 . . . . .	47
<b>3</b>	<b><math>Y</math>-filtration pour les cylindres d'homologie</b>	<b>49</b>
3.1	Application de chirurgie pour $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ . . . . .	49
3.1.1	Groupes abéliens spéciaux et le foncteur $\mathcal{A}_1$ . . . . .	49
3.1.2	Structures spin et le groupe abélien spécial $P$ . . . . .	50
3.1.3	L'application de chirurgie $\psi$ . . . . .	55
3.1.4	L'isomorphisme de groupes abéliens $\rho$ . . . . .	58
3.2	Cas des cylindres d'homologie sur une surface avec au plus une composante de bord . . . . .	59

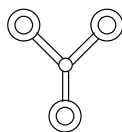
3.2.1	Le premier homomorphisme de Johnson pour les cylindres d'homologie . . . . .	59
3.2.2	Homomorphismes de Birman-Craggs pour les cylindres d'homologie . . . . .	64
3.2.3	Démonstration des théorèmes 2.6 et 2.7 . . . . .	67
3.3	Cas général . . . . .	73
3.3.1	Une borne supérieure combinatoire . . . . .	73
3.3.2	Démonstration du théorème 2.9 . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Y-filtration pour les string-links framés des boules d'homologie</b>	<b>76</b>
4.1	Borne supérieure combinatoire . . . . .	76
4.2	Invariants classiques pour les string-links framés des boules d'homologie . . . . .	77
4.2.1	Le $\mu$ -invariant de Rochlin des boules d'homologie . . .	77
4.2.2	Invariant de Arf . . . . .	78
4.2.3	Invariant de Sato-Levine . . . . .	80
4.2.4	Invariants de Milnor . . . . .	83
4.3	Caractérisation de la $Y_2$ -équivalence pour les string-links . . .	85
4.4	Milnor, Johnson, Birman-Craggs et les autres . . . . .	87
<b>5</b>	<b>C-filtration pour les string-links</b>	<b>91</b>
5.1	Invariants de Vassiliev des string-links . . . . .	91
5.1.1	L'invariant de Casson $c_2$ . . . . .	92
5.1.2	Invariant de Vassiliev de degré 2 pour les string-links à deux cordes . . . . .	94
5.1.3	Invariants de Milnor . . . . .	103
5.2	Caractérisation de la $C_2$ -équivalence pour les string-links . . .	103
5.3	Caractérisation de la $C_3$ -équivalence pour les string-links . . .	105
5.3.1	Application de chirurgie pour $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$ . . . . .	105
5.3.2	Preuve du théorème 2.21 . . . . .	107
5.4	Lien entre $C$ -filtration et $Y$ -filtration pour les string-links. . .	110
<b>A</b>	<b>L'invariant de Vassiliev <math>V_2</math>.</b>	<b>115</b>

## Introduction

La théorie des *invariants de type fini* est une approche récente dans l'étude des 3-variétés qui trouve son origine dans la théorie des nœuds.

V. Vassiliev définit en 1990 une famille d'invariants des nœuds [V] qui s'avèrent plus fins que tous les invariants polynômiaux connus jusqu'alors. L'idée est de définir une filtration (descendante) sur le groupe abélien librement engendré par les (classes d'isotopie des) nœuds orientés de la sphère  $S^3$  : un invariant est dit de type fini s'il s'annule à partir d'un cran de cette filtration. En 1996, T. Ohtsuki propose, en s'inspirant des travaux de Vassiliev, une approche similaire pour les sphères d'homologie entière [O1] : le point clef est qu'une notion de *mouvement élémentaire* sur les objets géométriques considérés définit une théorie d'invariants de type fini.

M. Goussarov et K. Habiro ont ainsi introduit à la fin des années 90, de façon indépendante, une théorie d'invariants de type fini des 3-variétés compactes orientées (eventuellement avec entrelacs). La définition repose sur la notion de *chirurgie borroméenne*, initialement introduite dans les années 80 par S. Matveev [Mt], qui est définie par le plongement dans la 3-variété d'un



*Y-graphe*, et qui consiste à découper puis recoller un voisinage tubulaire de ce graphe.

La théorie de Goussarov-Habiro est bien comprise dans le cas des sphères d'homologie rationnelle (elle coïncide avec la théorie d'Ohtsuki dans le cas des sphères d'homologie entière), mais on ne sait dire que peu de choses dans un cadre plus général.

Dans leurs travaux, M. Goussarov et K. Habiro ont en fait défini tout un ensemble d'outils de calcul topologique, appelé *calcul de claspers* [H] (ou encore calcul de *clovers* dans [GGP]). Le calcul de claspers s'applique à l'étude des paires

$$(M, \gamma)$$

où  $M$  est une 3-variété compacte orientée éventuellement à bord et où  $\gamma$  est un entrelacs de  $M$ . Plus précisément, on distingue deux approches :

- $M$  est fixée et  $\gamma$  varie : on étudie alors les entrelacs d'une 3-variété donnée. C'est dans ce contexte qu'intervient la théorie de Vassiliev.
- $M$  et  $\gamma$  (éventuellement vide) varient : on est alors dans le cadre de la théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro .

Le calcul de claspers permet alors de définir sur ces objets les relations de  $C_k$ -équivalence et de  $Y_k$ -équivalence respectivement, qui sont des relations



d'équivalence engendrées par des mouvements du type couper / recoller le long de corps en anses plongés. Elles induisent des filtrations sur le groupe abélien librement engendré par les objets considérés : la *C-filtration* sur les entrelacs (d'une variété donnée) et la *Y-filtration* sur les 3-variétés et leurs entrelacs.

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux paires  $(M, \sigma)$ , où  $M$  est un *cylindre d'homologie* sur une surface  $\Sigma$  compacte, connexe orientée, et  $\sigma$  est un *string-link* framé de  $M$  : le premier est un cobordisme d'homologie sur la surface  $\Sigma$  muni d'une condition de trivialité homologique supplémentaire, et le second est un plongement propre de copie de l'intervalle unité. Ces objets interviennent dans les papiers de M. Goussarov et de K. Habiro, et y sont présentés comme d'importants modèles pour la théorie. Ils constituent de plus des outils intéressants pour l'étude du mapping class group et du groupe des tresses pures.

Plus particulièrement, on considère certaines spécialisations de ce cadre général :

- (A)  $\sigma = \emptyset$  : cas des cylindres d'homologie sur une surface  $\Sigma$  compacte, connexe orientée.
- (B)  $\Sigma = D^2$  : cas des string-links framés dans des boules d'homologie.
- (C)  $M = D^2 \times I$  ; oubli du framing sur  $\sigma$  : cas des string-links 'classiques'.

Nous étudions donc la théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro dans les cas (A) et (B), et la théorie de Vassiliev dans le cas (C). En particulier, nous calculons explicitement les invariants en bas degré pour ces objets.

Dans le cas (A) sont ainsi étudiés les invariants de Goussarov-Habiro de degré 1 pour les cylindres d'homologie. Ils sont donnés par certaines extensions des homomorphismes de Johnson et de Birman-Craggs, intervenant initialement dans les travaux de D. Johnson pour le calcul de l'abélianisé du groupe de Torelli. On obtient le résultat suivant, qui est le fruit d'un **travail commun avec G. Massuyeau**.

**Théorème 1.** *Soit  $\Sigma$  une surface compacte connexe orientée de genre  $g$  ayant au plus une composante de bord. Soient  $M$  et  $M'$  deux éléments de  $\mathcal{HC}(\Sigma)$ , l'ensemble des cylindres d'homologie sur  $\Sigma$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $M$  et  $M'$  sont  $Y_2$ -équivalents ;
- (2)  $M$  et  $M'$  ne sont pas distingués par les invariants de Goussarov-Habiro de degré 1 ;
- (3)  $M$  and  $M'$  ne sont pas distingués par les extensions du premier homomorphisme de Johnson et des homomorphismes de Birman-Craggs.

De même, dans le cas (B), les invariants de degré 1 sont donnés par l'ensemble  $\mu_3$  des triples nombres de Milnor, et un certain invariant  $\tau$  qui regroupe les réductions modulo 2 de  $\mu_3$  et de l'invariant de Sato-Levine, et les invariants de Arf et de Rochlin.

**Théorème 2.** *Soient  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  deux éléments de  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ , l'ensemble des string-links framés à  $n$  cordes des boules d'homologie de framings et nombres d'enlacement nuls. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  sont  $Y_2$ -équivalents,
- (2)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  ne sont pas distingués par les invariants de Goussarov-Habiro de degré 1,
- (3)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  ne sont distingués ni par les triples nombres de Milnor, ni par l'invariant de Sato-Levine modulo 2, ni par l'invariant de Arf et le  $\mu$ -invariant de Rochlin.

Ces deux résultats sont vus comme des corollaires de théorèmes de caractérisation de la relation de  $Y_2$ -équivalence pour les cylindres d'homologie et les string-links. Autrement dit, on calcule les groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma) := \frac{\mathcal{HC}(\Sigma)}{Y_2\text{-équivalence}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) := \frac{\mathcal{SL}_1^{hb}(n)}{Y_2\text{-équivalence}},$$

en identifiant ces objets topologiques avec certains *espaces de diagrammes*. Il en résulte en particulier une interprétation diagrammatique des invariants des théorèmes 1 et 2. Notons que le groupe abélien  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  est calculé pour toute surface  $\Sigma$ , alors que le théorème 1 ne traite que du cas des surfaces ayant au plus une composante de bord.

Une correspondance est ensuite établie entre les cas d'étude (A) et (B), et donc entre les divers invariants des théorèmes 1 et 2 :

**Théorème 3.** *Il existe une bijection entre les ensembles  $\mathcal{HC}(\Sigma_{g,1})$  et  $\mathcal{SL}_1^{hb}(2g)$  qui produit (bien que n'étant pas un homomorphisme de monoïdes) un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \simeq \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g)$$

*tel que le premier homomorphisme de Johnson  $\eta_1$  et les homomorphismes de Birman-Craggs  $\beta$  correspondent respectivement aux triples nombres de Milnor  $\mu_3$  et à l'homomorphisme  $\tau$ .*

On adopte ensuite pour le cas d'étude (C) une approche similaire : le calcul des invariants de Vassiliev des string-links en degré 1 et 2 consiste en une caractérisation des relations de  $C_2$  et  $C_3$ -équivalence. Des calculs de claspers élémentaires montrent que deux string-links à  $n$

cordes sont  $C_2$ -équivalents si et seulement s'ils ont les mêmes nombres d'enlacement (les invariants de Vassiliev de degré 1). Comme corollaire, on retrouve le théorème de H. Murakami et Y. Nakanishi sur le  $\Delta$ -mouvement. On énonce ensuite le résultat suivant, qui implique la construction d'un certain invariant de Vassiliev  $V_2$  d'ordre 2 des string-links à 2 cordes :

**Théorème 4.** *Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux string-links à  $n$  cordes dans  $D^2 \times I$ , de nombres d'enlacement nuls. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$\sigma$  et  $\sigma'$  sont  $C_3$ -équivalents ;*
- (2) *les invariants de Vassiliev de d'ordre 2 ne distinguent pas  $\sigma$  et  $\sigma'$  ;*
- (3)  *$\sigma$  et  $\sigma'$  ne sont distingués ni par les triples nombres de Milnor, ni par l'invariant  $V_2$ , ni par l'invariant de Casson des nœuds.*

Ce résultat consiste, comme précédemment, à calculer le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  des classes de  $C_3$ -équivalence des string-links de nombres d'enlacement nuls, en l'identifiant avec un espace de diagrammes.

Enfin, on étudie le lien entre les cas d'étude (B) et (C) ; en d'autres termes, on s'intéresse aux relations entre la  $Y$ -filtration et la  $C$ -filtration (dans le cadre des string-links). On obtient le résultat suivant

**Théorème 5.** *Le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  s'envoie surjectivement sur le sous-groupe  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \subset \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$  des string-links dans des boules d'homologie d'invariant de Rochlin nul. De plus, les réductions modulo 2 des invariants  $V_2$  et de Sato-Levine coïncident via cette surjection.*

---

Cette thèse s'organise de la façon suivante. La première partie est consacrée à la théorie des claspers de Goussarov et Habiro, rappelée ici de façon unifiée dans le souci de rendre ce texte le plus 'auto-contenu' possible.

Dans la seconde partie, nous introduisons les objets de notre étude. Les cylindres d'homologie et les string-links sont présentés, puis nous exposons en détail les résultats obtenus.

La troisième partie est dédiée au cas d'étude (A). Nous démontrons donc le théorème 1 après avoir défini les extensions des homomorphismes de Johnson et de Birman-Craggs. De plus, on caractérise la relation de  $Y_2$ -équivalence pour les cylindres d'homologie sur une surface quelconque.

Le cas d'étude (B) est abordé de façon similaire dans la quatrième partie : on y étudie les invariants d'entrelacs classiques cités plus haut, pour ensuite caractériser la relation de  $Y_2$ -équivalence pour les string-links framés des boules d'homologie et prouver le théorème 2. On démontre ensuite le théorème 3 qui relie ces deux premiers cas d'étude.

Enfin, la cinquième partie concerne le cas d'étude (C). On s'intéresse donc dans la section 5.1 aux invariants de Vassiliev des string-links. En particulier, l'invariant  $V_2$  évoqué plus haut y est défini et étudié (certains calculs un peu techniques étant reportés en annexe). On démontre ensuite les résultats

sur la  $C_2$ -équivalence, puis le théorème 4. La fin de la cinquième partie traite des connections entre les cas d'études (B) et (C) ; en particulier, le théorème 5 est établi.

# 1 Introduction à la théorie des claspers de Goussarov-Habiro

Il existe encore peu de références sur cette théorie. Les deux principales sont les papiers fondateurs de K. Habiro ([H]) et de S. Garoufalidis, M. Goussarov et M. Polyak ([GGP]). On trouve aussi une bonne introduction dans le livre de T. Ohtsuki [O2, Appendice E].

*Conventions* 1.1. Toutes les variétés considérées seront supposées compactes et orientées, sauf s'il est fait mention explicite du contraire.

## 1.1 Qu'est-ce qu'un clasper ?

Soit  $(M, \gamma)$  un entrelacs (éventuellement à bord ou vide) dans une 3-variété  $M$ .

### 1.1.1 Définitions et conventions

**Définition 1.2.** Un *clasper* pour  $\gamma$  dans  $M$  est le plongement dans  $M$  d'une surface non nécessairement orientée  $G$  décomposée en *constituants* appelés côtés, feuilles, feuilles-disquées, sommets et boîtes - voir Figure 1 :

- Un *côté* est une 1-anse ( $\cong D^1 \times D^1$ ). On appelle *extrémités* d'un côté les deux composantes connexes de  $S^0 \times D^1 \subset D^1 \times D^1$  (les zones d'attachement de la 1-anse). Les côtés de  $G$  intersectent l'ensemble des autres constituants au niveau de leurs extrémités.
- Une *feuille* est un anneau ( $\cong S^1 \times D^1$ ), dont une des composantes de bord contient l'extrémité d'un côté.
- Une *feuille disquée* est une 0-anse ( $\cong D^2$ ), dont le bord contient l'extrémité d'un côté.
- Un *sommet* est une 0-anse dont le bord contient l'extrémité de trois côtés (avec éventuellement un côté dont les deux extrémités sont attachées au même sommet).
- Une *boîte* est une 0-anse dont le bord contient l'extrémité de trois côtés, deux d'entre elles (les *entrées*) étant distingués de la troisième (la *sortie*).

$\gamma$  n'intersecte pas  $G$ , sauf éventuellement au niveau des feuilles disquées (qu'il intersecte transversalement en un ou plusieurs points).

Remarquons que, par définition, un clasper contient au moins un côté.

On distingue en particulier les claspers composés de deux feuilles (éventuellement disquées) reliées par un côté : ce sont les *claspers basiques* - voir la figure 2.

Ainsi, un clasper  $G$  est par définition le plongement d'une surface dans une 3-variété. Pour dessiner un clasper dans  $S^3$  ou dans un corps en anses  $H_g$  de genre  $g$  (en général, un voisinage régulier de cette surface), on utilisera la représentation schématique (1-dimensionnelle) donnée dans la figure 1,

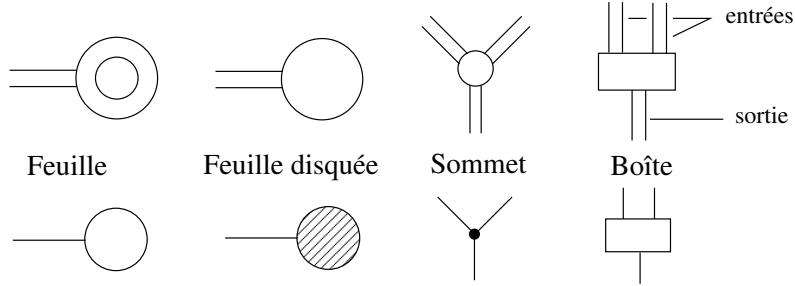
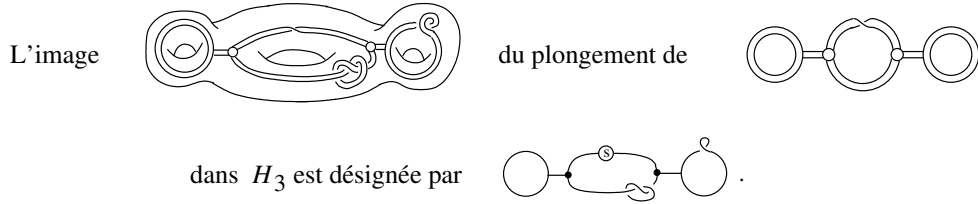


FIG. 1 – Les différents constituants d'un clasper, et leur représentation schématique.

qui utilise la convention d'épaississement du tableau. Un exemple de clasper dans  $H_3$  :



Notons qu'un  $\otimes$  sur un côté indique la présence d'un demi-twist à droite.

On distingue, outre les claspers basiques, certains types particuliers de claspers.

**Définition 1.3.** On appelle *graphe de claspers* un clasper qui ne contient pas de boîtes.

De plus, on appelle *arbre de claspers*, ou *arbre*, un graphe de claspers connexe dont la sous-surface formée par l'union de ses côtés et de ses sommets est simplement connexe. Une union disjointe de plusieurs arbres est appelée une *forêt de claspers*.

**Définition 1.4.** Soit  $G$  un graphe de claspers pour un entrelacs  $\gamma$  (éventuellement vide) dans une 3-variété  $M$ .  $G$  est dit *acceptable* si chaque composante connexe de  $G$  possède au moins un sommet, et n'a pas de feuille disquée.

De tels graphes de claspers sont dits *allowable* dans [H] et sont appelés *clovers* dans [GGP].

**Définition 1.5.** Soit  $G$  un graphe de claspers pour un entrelacs  $\gamma \neq \emptyset$  dans une 3-variété  $M$ .  $G$  est dit *strict* si toutes ses feuilles sont disquées, et si chaque composante connexe de  $G$  possède au moins une feuille disquée.

Il est de plus dit *simple* si ses feuilles disquées intersectent  $\gamma$  en un seul point.

### 1.1.2 Chirurgie le long d'un clasper

Soit  $B$  un clasper basique, et  $B_0$  le clasper basique obtenu en remplaçant les éventuelles feuilles disquées par des feuilles. Soit  $N(B_0)$  un voisinage régulier de  $B_0$  dans  $M$  :  $N(B_0) \cap \gamma = \emptyset$ . On peut associer un entrelacs en bandes à deux composantes  $L_B$  dans  $N(B_0)$  comme représenté dans la figure 2.<sup>1</sup>

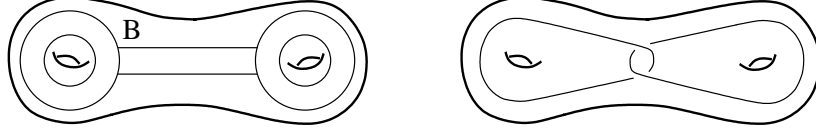


FIG. 2 – Un clasper basique dans son voisinage régulier, et l'entrelacs à deux composantes associé.

De même, on associe à tout clasper  $G$  un entrelacs en bandes :

- Dans un premier temps, on considère le clasper  $G_0$  obtenu en remplaçant les éventuelles feuilles disquées par des feuilles. Son voisinage régulier  $N(G_0)$  vérifie donc  $N(G_0) \cap \gamma = \emptyset$ .
- Puis, on décompose  $G_0$  dans  $N(G_0)$  en une union disjointe de claspsers basiques en cassant ses sommets et ses boîtes de la façon indiquée dans la figure 3.

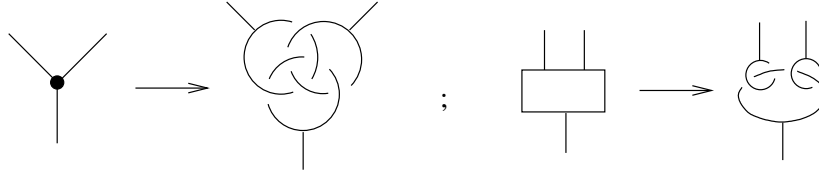


FIG. 3 – Cassure d'un clasper en une union de claspsers basiques

- Enfin, on remplace chacun de ces claspsers basiques par l'entrelacs à deux composantes associé. Le résultat est un entrelacs à  $2E$  composantes, où  $E$  désigne le nombre de côtés de  $G$ , noté  $L_G$ .

Ainsi, tout clasper  $G$  pour un entrelacs  $\gamma$  dans une 3-variété  $M$  contient une instruction de chirurgie : on définit la *chirurgie le long du clasper  $G$*  comme la chirurgie le long de l'entrelacs associé  $L_G$ . On note  $(M_G, \gamma_G)$  le résultat de la chirurgie sur  $(M, \gamma)$  le long du clasper  $G$  :

$$\begin{cases} \cdot & M_G = (M \setminus \text{int}(N(G_0))) \cup_{\partial} N(G_0)_{L_G}, \\ \cdot & \gamma_G \text{ est l'entrelacs de } M_G \text{ défini par } \gamma \subset M \setminus \text{int}(N(G_0)) \subset M_G. \end{cases}$$

Le lemme suivant montre l'effet de chirurgie d'un clasper basique possédant une feuille disquée :

<sup>1</sup>On utilise la convention d'épaississement du tableau.

**Lemme 1.6 (Lemme fondamental des claspers).** [H, Prop. 2.2]

a) Soit  $B$  un clasper basique pour  $\gamma$  dans  $M$  possédant une feuille et une feuille disquée. Alors, il existe un difféomorphisme entre  $N(B)$  et  $N(B)_B$  fixant le bord point par point et qui s'étend (par l'identité) à un difféomorphisme  $\varphi : M \rightarrow M_B$ .

b) Si de plus on suppose qu'une famille  $X$  d'objets 1-dimensionnels ou en bandes (composantes de  $\gamma$ , clasper...) intersecte transversalement la feuille disquée de  $B$ , alors  $\varphi^{-1}(X_B) \subset M$  est comme représenté dans la partie droite de la figure 4.

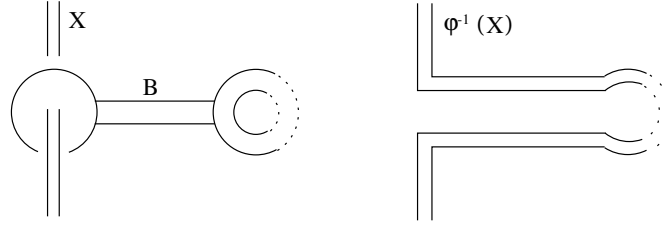


FIG. 4 - .

*Idée de la preuve :* Le lemme se montre par du calcul de Kirby : il apparait pour a) que la chirurgie sur  $M$  le long d'un entrelacs à 2 composantes  $L_1 \cup L_2$  tel que  $L_1$  est un méridien 0-framé de  $L_2$  produit une 3-variété difféomorphe à  $M$ . Le point b) se prouve en faisant glisser les brins de  $X$  un à un le long de la composante de  $L_B$  qui ne les enlace pas.

**Proposition 1.7.** [H, Prop. 3.3]; [GGP, Lem. 2]

Soit  $G$  un clasper pour  $\gamma$  dans  $M$  tel que chaque composante connexe de  $G$  contient au moins une feuille disquée. On note  $N$  le voisinage régulier de  $G$ . Alors, il existe un difféomorphisme  $N \cong N_G$  qui fixe le bord point par point, qui s'étend à un difféomorphisme (dont la restriction à l'extérieur de  $N$  est l'identité)

$$\varphi_G : M \xrightarrow{\cong} M_G.$$

*Idée de la preuve :* Elle se fait par récurrence sur le nombre de sommets : si  $G$  n'a pas de sommet, on applique le lemme fondamental 1.6. Si  $G$  a  $p > 1$  sommets, on considère le sommet adjacent à la feuille disquée, que l'on 'casse' comme dans la figure 3 en trois feuilles formant un borroméen : le clasper obtenu a le même effet de chirurgie que  $G$ . De plus, on peut d'après le lemme 1.6 éliminer le clasper basique contenant notre feuille disquée : chacune des composantes restantes a une feuille disquée (disjointe de  $\gamma$ ) issue du borroméen, et on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence.

**Remarque 1.8.** D'après la proposition 1.7, la chirurgie le long d'un graphe de clasper strict  $G$  pour  $\gamma$  dans  $M$  produit une 3-variété  $M_G$  difféomorphe à  $M$ . On notera encore  $\gamma_G$ , et on appellera *entrelacs obtenu de  $\gamma$  par chirurgie le long de  $G$* , l'entrelacs  $\varphi_G^{-1}(\gamma_G) \subset M$ .



### 1.1.3 Calcul de claspers

**Définition 1.9.** Soit  $G$  (respectivement  $G'$ ) un clasper pour  $\gamma$  dans  $M$ . Les claspers  $G$  et  $G'$  sont dits *équivalents*, noté  $G \sim G'$ , s'ils ont des résultats de chirurgie équivalents, c'est-à-dire :

- si  $G$  et  $G'$  sont stricts, les résultats de chirurgie  $\gamma_G$  et  $\gamma'_{G'}$  sont isotopes (relativement au bord) dans  $M$ .
- sinon, les résultats de chirurgie  $(M, \gamma)_G$  et  $(M, \gamma')_{G'}$  sont reliés par un difféomorphisme (préservant l'orientation) qui est l'identité sur le bord.

**Proposition 1.10 (Les 12 mouvements d'Habiro).** *[H, Prop. 2.7]*

*Les mouvements 1 à 12 présentés dans la figure 5 sont des équivalences de clasper dans des corps en anses.*

Dans la figure,  $X$  désigne une famille d'objets 1-dimensionnels ou en bandes (entrelacs, feuille ou côté de clasper...). Bien que la figure ne représente que des claspers avec feuilles, on peut également effectuer ces mouvements avec des feuilles disquées (dont on n'a représenté que la partie utile).

*Idée de la preuve :* Le mouvement 1 est l'application du lemme fondamental 1.6. Les autres mouvements se démontrent successivement par applications des mouvements précédents et isotopies de claspers.

**Proposition 1.11 (Glissement de feuille).** *[GGP, Thm. 3.1]*

*Le mouvement représenté dans la figure 6, qui consiste à glisser une feuille le long d'une feuille adjacente (au sens où elle est incidente au même sommet) au prix d'un twist positif, est une équivalence de clasper.*

*Idée de la preuve :* Application des mouvements 2, puis 10 d'Habiro, suivie d'une isotopie du type 'glissement d'anses'.

**Pousserment de boîtes.** Les claspers qui nous intéressent sont les graphes, c'est-à-dire ceux qui ne possèdent pas de boîtes, ces dernières ne servant que d'outils lors des calculs. Nous allons donc voir la procédure de *pousserment de boîtes*, ou *zip-construction* dans [H], qui nous permet, à l'issue des calculs, de nous débarrasser des boîtes.

Etant donné un clasper  $G$  pour  $\gamma$  dans  $M$ , on appelle *sous-arbre* de  $G$  toute sous-surface formant un arbre auquel on aurait enlevé des feuilles. Les côtés que l'on a ainsi coupés sont les *branches*.

On distingue pour  $G$  les *sous-arbres sortie*, dont l'unique branche est la sortie d'une boîte de  $G$ , et les *sous-arbres entrée*, dont chaque branche est une entrée d'une boîte.

**Définition 1.12.** On dit que le clasper  $G$  est *zippé* s'il possède un sous-arbre entrée  $I$  avec au plus une branche incidente par boîte de  $G$ , chaque boîte incidente à  $I$  possédant aussi un sous-arbre sortie.

Le complémentaire  $G \setminus I$  est une sous-surface de  $G$  qui possède des boîtes n'ayant qu'une entrée : en remplaçant chaque telle boîte de  $G \setminus I$  par un

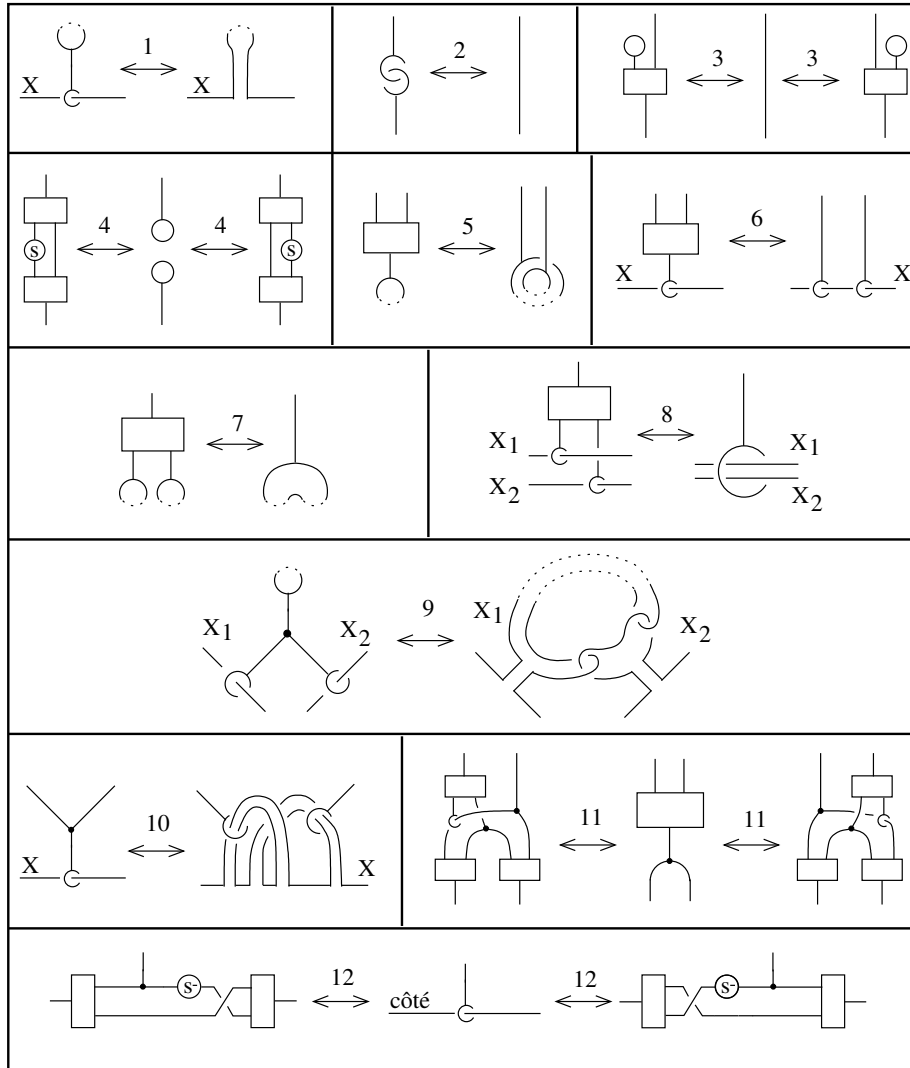


FIG. 5 – Les 12 mouvements d'Habiro.

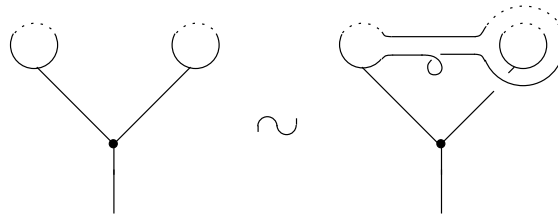


FIG. 6 – Glissement d'une feuille sur une feuille adjacente.

côté, en connectant les deux côtés incidents (entrée et sortie), on obtient un clasper noté  $G \ominus I$ .

**Lemme 1.13 (Poussément de boîtes).** [H, §3.3]

Soit  $G$  un clasper pour  $\gamma$  dans  $M$  tel que  $G$  possède un sous-arbre entrée  $I$  à  $k$  sommets. Soient  $O_1, \dots, O_n$  les sous-arbres sortie associés à  $I$ , et  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) leur nombre de sommets. Alors,  $G$  est équivalent à  $P \cup Q$  dans un voisinage régulier  $N$ , où  $P$  et  $Q$  sont des claspers pour  $\gamma$ , disjoints dans  $N$ , tels que :

- $P \sim G \ominus I$  dans  $N$ .
- $Q$  est un arbre à  $k + k_1 + \dots + k_n$  sommets.

**Exemple 1.14.** Un exemple est donné dans la figure 7. On a bien  $P \sim G \ominus I$  par application du mouvement 3 d'Habiro.

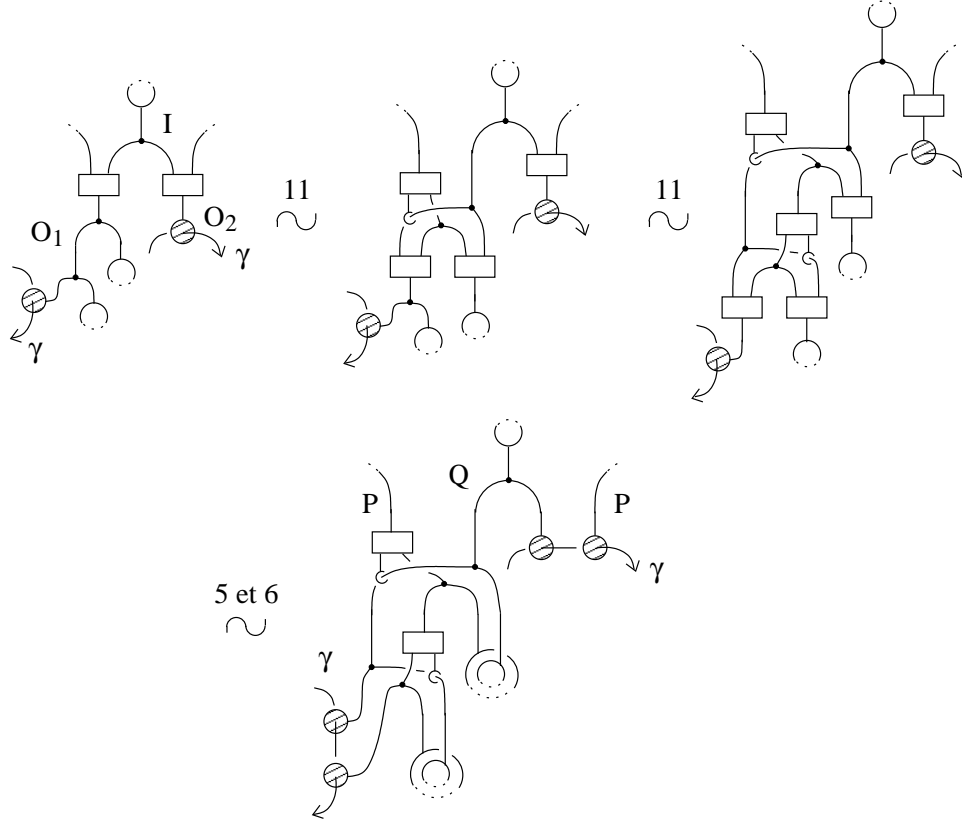


FIG. 7 – Un exemple de poussément de boîtes.

## 1.2 Relations d'équivalence chirurgicale issues des claspers

K. Habiro définit dans [H] deux relations d'équivalence pour les entrelacs et les variétés en termes de chirurgie le long de graphes de claspers. La

première est dédiée à l'étude des entrelacs d'une 3-variété fixée (voir aussi [G2]), et la seconde aux 3-variétés, éventuellement avec entrelacs (voir aussi [G1]).

### 1.2.1 $C_k$ -équivalence pour les entrelacs

Soit  $M$  une 3-variété fixée, et  $\gamma$  un entrelacs de  $M$  (éventuellement à bord, le bord de  $\gamma$  étant alors proprement plongé dans le bord de  $M$ ).

**Définition 1.15.** Soit  $T$  un arbre strict pour  $\gamma$  : le  $C$ -degré d'un tel arbre est égal au nombre de sommets *plus 1*, et le  $C$ -degré d'une forêt stricte pour  $\gamma$  est le minimum des  $C$ -degrés de ses composantes connexes.

**Définition 1.16.** Pour  $k \geq 1$ , on appelle  $C_k$ -mouvement sur  $\gamma$  un mouvement de chirurgie sur  $\gamma$  le long d'un arbre strict  $T$  de  $C$ -degré  $k$ , noté

$$\gamma \mapsto_{C_k} \gamma_T.$$

On appelle  $C_k$ -équivalence la relation d'équivalence sur l'ensemble des entrelacs de  $M$  engendrée par les  $C_k$ -mouvements et les isotopies.

**Remarque 1.17.** Les  $C_k$ -mouvements, ainsi que la relation d'équivalence qu'ils engendrent, sont reliés à un certain nombre de notions apparaissant dans la littérature. On distinguera, entre autres, les notions de modifications interdépendantes [G3] et de  $k$ -variations [G2] de M. Goussarov, les grope-cobordismes de classe  $k$  de J. Conant et P. Teichner [CT], ou encore la  $LCS_n$ -équivalence de T. Stanford [St].

La proposition suivante, issue des propositions 3.7, 3.22, 3.23 et 3.17 de [H] (auxquelles est renvoyé le lecteur pour une preuve), énonce les propriétés de cette relation de  $C_k$ -équivalence.

**Proposition 1.18.** 1. Pour  $0 \leq k \leq l$ , un  $C_l$ -mouvement peut être réalisé par un  $C_k$ -mouvement : la  $C_l$ -équivalence implique donc la  $C_k$ -équivalence.

2. Une suite de  $C_k$ -mouvements peut être réalisée de façon simultanée.

3. Un  $C_k$ -mouvement est réversible.

4. Les arbres simples (Déf. 1.5) de  $C$ -degré  $k$  suffisent à engendrer la  $C_k$ -équivalence.

**Exemple 1.19.** [H, p. 56-57]

- Les  $C_1$ -mouvements simples, qui engendrent la relation de  $C_1$ -équivalence, sont juste des changements de croisement, comme le montre la figure 8.<sup>2</sup> Ainsi, la  $C_1$ -équivalence coïncide avec la relation d'homotopie.

---

<sup>2</sup>Ici, et fréquemment par la suite, on oublie les hachures lorsque l'on représente les feuilles disquées.

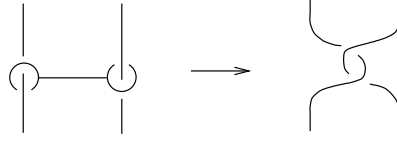


FIG. 8 – Un  $C_1$ -mouvement simple.

- La relation de  $C_2$ -équivalence est de même engendrée par les  $C_2$ -mouvements simples : un tel mouvement consiste en une somme connexe avec un entrelacs borroméen - voir Figure 9.
- En général, un  $C_k$ -mouvement simple est la somme connexe avec un Bing-double itéré [C1] de l'entrelacs de Hopf avec  $k + 1$  composantes. La figure 9 illustre le cas  $k = 3$ .

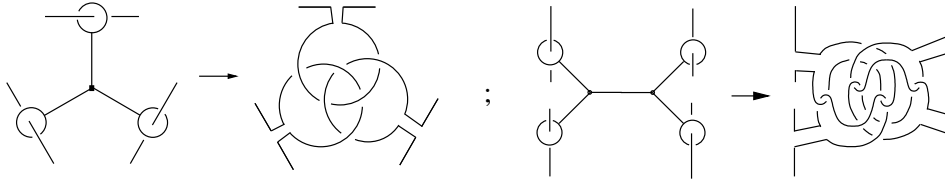


FIG. 9 – Un  $C_2$ -mouvement simple et un  $C_3$ -mouvement simple.

**Remarque 1.20.** [H, p. 57]

H. Murakami et Y. Nakanishi définissent dans [MN] une opération sur les entrelacs, le  $\Delta$ -mouvement, représentée dans la figure 10. Ils montrent que c'est une opération de dénouage sur les nœuds, *i.e.* tout nœud est ramené au nœud trivial par une suite finie de  $\Delta$ -mouvements.

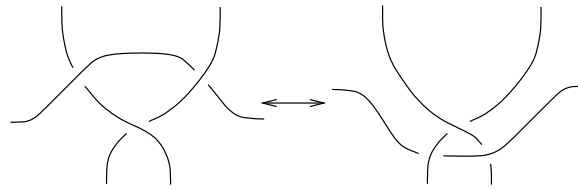
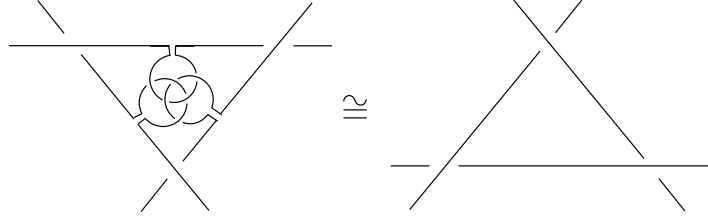


FIG. 10 – Un  $\Delta$ -mouvement.

Comme le montrent les auteurs ([MN, Fig. 2.2], reproduite ci-dessous), un  $\Delta$ -mouvement est équivalent à un  $C_2$ -mouvement simple.

### 1.2.2 $Y_k$ -équivalence pour les 3-variétés avec entrelacs

Soit  $\gamma$  un entrelacs (éventuellement vide) dans une 3-variété  $M$ .



**Définition 1.21.** Soit  $G$  un graphe connexe acceptable dans  $M$ , disjoint de  $\gamma$  : le  $Y$ -degré de  $G$  est égal au nombre de sommets (qui est supérieur ou égal à 1), et le  $Y$ -degré d'un graphe acceptable quelconque de  $M$  est le minimum des  $Y$ -degrés de ses composantes connexes.

**Définition 1.22.** Pour  $k \geq 1$ , on appelle  $Y_k$ -mouvement sur  $(M, \gamma)$  un mouvement de chirurgie sur  $(M, \gamma)$  le long d'un graphe connexe acceptable  $G$  de  $Y$ -degré  $k$ , noté

$$(M, \gamma) \mapsto_{Y_k} (M, \gamma)_G.$$

On appelle  $Y_k$ -équivalence la relation d'équivalence sur les 3-variétés avec entrelacs engendrée par les  $Y_k$ -mouvements et les difféomorphismes préservant l'orientation.

Par analogie avec la proposition 1.18, on a le résultat suivant.

**Proposition 1.23.** 1. Pour  $0 \leq k \leq l$ , un  $Y_l$ -mouvement peut être réalisé par un  $Y_k$ -mouvement : la  $Y_l$ -équivalence implique donc la  $Y_k$ -équivalence.

2. Une suite de  $Y_k$ -mouvements peut être réalisée de façon simultanée.

3. Un  $Y_k$ -mouvement est réversible.

4. Les arbres acceptables de  $Y$ -degré  $k$  suffisent à engendrer la  $Y_k$ -équivalence.

Le dernier point est juste dû au fait que, par le mouvement 2 d'Habiro, tout graphe connexe est équivalent à un arbre.

**Exemple 1.24.** Un arbre de clasper acceptable de  $Y$ -degré 1 est appelé un  $Y$ -graphe dans la littérature ([G1], [GGP]). De même, un  $Y_1$ -mouvement (resp. la  $Y_1$ -équivalence) est aussi appelé une  $Y$ -chirurgie (resp.  $Y$ -équivalence), ou encore *chirurgie borroméenne* par S. Matveev dans [Mt]. Il est établi par ce dernier [Mt, Thm. 2] que deux 3-variétés fermées orientées sont  $Y$ -équivalentes si et seulement si elles ont les même premiers nombres de Betti et des formes d'enlacement  $T \otimes T \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  isomorphes, où  $T$  désigne le sous-groupe de torsion du premier groupe d'homologie de la variété.

### 1.3 Invariants de type fini et claspers

#### 1.3.1 Invariants de Vassiliev et claspers

Comme l'explique K. Habiro dans [H, §6.2], la théorie de Vassiliev (aussi appelée théorie de Vassiliev-Goussarov) peut se reformuler en termes de claspers. Commençons par rappeler la notion d'invariant de Vassiliev (voir [BN1]).

Soit  $\gamma_0$  un entrelacs fixé dans une 3-variété  $M$ . On note  $\mathcal{L}(M, \gamma_0)$  l'ensemble des (classes d'isotopie des) entrelacs orientés de  $M$  homotopes à  $\gamma_0$ , et  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(M, \gamma_0)$  le groupe abélien librement engendré par les éléments de  $\mathcal{L}(M, \gamma_0)$ . Un *entrelacs singulier* de  $M$  est une immersion de copies de  $S^1$  dans  $M$  dont les singularités sont des points doubles (transverses). Un tel entrelacs peut être vu comme un élément de  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(M, \gamma_0)$  en éliminant les singularités par :

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array},$$

et pour tout  $k \geq 0$ , on note  $\mathcal{L}^{[k]}(M, \gamma_0)$  le groupe abélien librement engendré par les entrelacs singuliers de  $M$  avec  $k$  points singuliers, homotopes à  $\gamma_0$  (lorsque  $M$  et  $\gamma_0$  sont clairs d'après le contexte, on les oubliera dans la notation).<sup>3</sup> Les  $\mathcal{L}^{[k]}(\gamma_0)$  définissent une filtration descendante de  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(\gamma_0)$

$$\mathbf{Z}\mathcal{L}(\gamma_0) = \mathcal{L}^{[0]}(\gamma_0) \supset \mathcal{L}^{[1]}(\gamma_0) \supset \dots \supset \mathcal{L}^{[k]}(\gamma_0) \supset \dots$$

appelée *filtration de Vassiliev*.

**Définition 1.25.** Soit  $A$  un groupe abélien, et  $k \geq 0$  un entier. Un invariant des entrelacs  $f : \mathcal{L}(M, \gamma_0) \longrightarrow A$  est un *invariant de Vassiliev de degré  $k$*  si son extension à  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(M, \gamma_0)$  s'annule sur  $\mathcal{L}^{[k+1]}(M, \gamma_0)$ .

Le groupe des invariants de Vassiliev de degré  $k$  à valeurs dans  $A$  est donc isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbf{Z}\mathcal{L}(M, \gamma_0) / \mathcal{L}^{[k+1]}(M, \gamma_0), A)$ .

Le cas des string-links est traité de façon plus approfondie dans §5.1.

On redéfinit à présent cette notion en termes de claspers stricts. Soit  $\gamma \in \mathcal{L}(M, \gamma_0) = \mathcal{L}(\gamma_0)$ .<sup>4</sup> Soit  $l \geq 0$  un entier.

**Définition 1.26.** Un *schéma de variation de dimension  $l$  pour  $\gamma$*  est une forêt de claspers stricts  $G = G_1 \cup \dots \cup G_l$  pour  $\gamma$  (les  $G_i$  étant supposés connexes). Il est dit *simple* si les composantes  $G_i$  de  $G$  sont simples. Le degré d'un schéma de variation, appelé *S-degré*, est la somme des *C-degrés* de ses composantes :  $S\text{-deg}(G) = \sum_{i=1}^l C\text{-deg}(G_i)$ .

Pour  $\gamma \in \mathcal{L}(\gamma_0)$ , et  $G$  un schéma de variation pour  $\gamma$ , on définit la somme alternée

$$[\gamma, G] = \sum_{G' \subset G} (-1)^{|G'|} \gamma_{G'} \in \mathbf{Z}\mathcal{L}(\gamma_0),$$

<sup>3</sup>  $\mathcal{L}^{[k]}(\gamma_0)$  est noté  $J_k(\gamma_0)$  dans [H].

<sup>4</sup> Par l'exemple 1.19, choisir un  $\gamma$  homotope à  $\gamma_0$  signifie juste que  $\gamma \sim_{C_1} \gamma_0 : \mathcal{L}(\gamma_0)$  désigne donc la classe de  $C_1$ -équivalence de  $\gamma_0$ .

où la somme est prise sur toutes les sous-parties  $G'$  de  $G$ , avec  $|G'|$  le nombre de composantes connexes de  $G'$ .

Pour  $k \geq l \geq 0$ , on note  $\mathcal{F}_k^l(\gamma_0)$  le sous-groupe abélien de  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(\gamma_0)$  engendré par les éléments  $[\gamma, G]$ , où  $\gamma \in \mathcal{L}(\gamma_0)$  et où  $G$  est un schéma de variation de dimension  $l$  pour  $\gamma$  de  $S$ -degré  $k$  ( $\mathcal{F}_k^l(\gamma_0)$  est noté  $J_k^l(\gamma_0)$  par K. Habiro) :

$$\mathcal{F}_k^l(\gamma_0) = \langle [\gamma, G] ; \gamma \in \mathcal{L}(\gamma_0) , S\text{-deg}(G) = k \text{ et } |G| = l \rangle .$$

De même, on définit

$$\mathcal{F}_k(\gamma_0) = \langle [\gamma, G] ; \gamma \in \mathcal{L}(\gamma_0) , S\text{-deg}(G) = k \rangle .$$

On a donc les inclusions suivantes, issues du calcul de claspers ([H, Prop. 6.7]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\gamma_0) &= \mathcal{F}_k^k(\gamma_0) \supseteq \mathcal{F}_k^{k-1}(\gamma_0) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}_k^1(\gamma_0) \\ \mathcal{F}_l(\gamma_0) &= \mathcal{F}_l^l(\gamma_0) \supseteq \mathcal{F}_{l+1}^l(\gamma_0) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}_{k-1}^l(\gamma_0) \supseteq \mathcal{F}_k^l(\gamma_0) \end{aligned}$$

On observe ([H, Prop. 6.7])) que la filtration de  $\mathbf{Z}\mathcal{L}(\gamma_0)$  induite par les groupes  $\mathcal{F}_k(\gamma_0)$  coïncide avec la filtration de Vassiliev définie plus haut :

$$\forall k \geq 1 , \mathcal{L}^{[k]}(\gamma_0) = \mathcal{F}_k(\gamma_0).$$

La preuve de cette égalité repose sur l'observation suivante :

$$\text{X} = \text{X} - \text{X} = [\text{X}, B],$$

où  $B$  est un schéma de variation de degré 1 pour  $\text{X}$  constitué d'un clasper basique dont chaque feuille enlace un des deux brins de  $\text{X}$  - voir figure ci-dessous.

$$\left[ \text{X} \right] = \text{X} - \text{X}$$

Comme corollaire, on a alors le résultat suivant.

**Théorème 1.27.** [H, Cor. 6.8]

Pour  $k \geq 1$ , si deux entrelacs d'une 3-variété  $M$  sont  $C_{k+1}$ -équivalents alors ils ne sont pas distingués par les invariants de Vassiliev de degré  $\leq k$ .

**Remarque 1.28.** K. Habiro montre que la réciproque est vraie pour les nœuds orientés de  $S^3$  [H, Thm. 6.18] (une preuve de cette réciproque a été également donnée par L. Funar [Fu]). Il est conjecturé par K. Habiro ([H, Conj. 6.13], voir aussi [G1, Thm. 4]) qu'il en est de même pour les string-links (Déf. 2.10) : une réponse partielle à cette conjecture est donnée



par M. Goussarov [G2, Thm. 10.4], et est fondée sur la notion d'invariant *partiellement défini*.<sup>5</sup>

### 1.3.2 Théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro pour les 3-variétés

Cette théorie d'invariants de type fini est l'objet principal de [GGP]; elle est aussi évoquée par K. Habiro ([H, §8.4.2]) - voir aussi [Ha1, §5]. Bien qu'elle se définisse aussi bien pour les 3-variétés avec entrelacs que pour les 3-variétés, nous nous restreignons dans cette section à ces dernières.

Soit  $M_0$  une 3-variété, et  $\mathcal{M}_0$  la classe de  $Y$ -équivalence (*i.e.* de  $Y_1$ -équivalence) de  $M_0$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_0$  et  $l \geq 0$  un entier.

**Définition 1.29.** Un *schéma de variation de dimension  $l$  acceptable pour  $M$*  est un graphe de claspers acceptable  $G = G_1 \cup \dots \cup G_l$  de  $M$ , les  $G_i$  étant supposés connexes. Le degré d'un schéma de variation acceptable de  $M$ , appelé *A-degré*, est la somme des  $Y$ -degrés de ses composantes :  $A\text{-deg}(G) = \sum_{i=1}^l Y\text{-deg}(G_i)$ .

Pour des entiers  $k \geq l \geq 0$ , on définit les sous-groupes abéliens de  $\mathbf{Z}\mathcal{M}_0$  (le groupe abélien librement engendré par les 3-variétés  $Y$ -équivalentes à  $M_0$ ) suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k^l(M_0) &= \langle [M, G]; M \in \mathcal{M}_0, A\text{-deg}(G) = k \text{ et } |G| = l \rangle, \\ \mathcal{F}_k(M_0) &= \langle [M, G]; M \in \mathcal{M}_0, A\text{-deg}(G) = k \rangle.\end{aligned}$$

où, comme dans la section précédente,  $[M, G] = \sum_{G' \subset G} (-1)^{|G'|} M_{G'}$ , avec  $|G'|$  le nombre de composantes connexes de  $G'$ . Les groupes  $\mathcal{F}_k(M_0)$  induisent donc une filtration descendante de  $\mathbf{Z}\mathcal{M}_0$ , que l'on appelle *filtration de Goussarov-Habiro* :<sup>6</sup>

$$\mathbf{Z}\mathcal{M}_0 = \mathcal{F}_0(M_0) \supset \mathcal{F}_1(M_0) \supset \dots \supset \mathcal{F}_k(M_0) \supset \dots$$

**Définition 1.30.** Soit  $A$  un groupe abélien, et  $k \geq 0$  un entier. Un *invariant de type fini de degré  $k$*  (au sens de Goussarov-Habiro) sur  $\mathcal{M}_0$  est une application  $f : \mathcal{M}_0 \rightarrow A$  dont l'extension à  $\mathbf{Z}\mathcal{M}_0$  s'annule sur  $\mathcal{F}_{k+1}(M_0)$ . Le groupe des invariants de type fini de degré  $k$  à valeurs dans  $A$  est donc isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbf{Z}\mathcal{M}_0 / \mathcal{F}_{k+1}(M_0), A)$ .

Le résultat suivant suit des définitions introduites ci-dessus.

---

<sup>5</sup>Soit  $c$  une classe de  $C_k$ -équivalence des string-links à  $n$  cordes. Soit  $\mathcal{F}_{k+1}[c]$ , le sous-groupe de  $\mathbf{Z}c$  (le  $\mathbf{Z}$ -module libre sur  $c$ ) engendré par les éléments  $[\sigma, G]$ , où  $G$  est un schéma de variation de dimension  $k$  tel que, pour tout  $G' \subset G$ , on a  $\sigma_{G'} \sim_{C_k} c$ . Soit  $A$  un groupe abélien. Un invariant des string-links  $f : c \longrightarrow A$  est un *invariant de type  $k$  partiellement défini* si son extension à  $\mathbf{Z}c$  s'annule sur  $\mathcal{F}_{k+1}[c]$ .

<sup>6</sup>Cette filtration est appelée *filtration  $\mathcal{F}_n^Y$*  dans [GGP], et *A-filtration* dans [H].

**Théorème 1.31.** [H, §8.4.2]

Pour  $k \geq 1$ , si deux 3-variétés  $M$  et  $M'$  sont  $Y_{k+1}$ -équivalents alors elles ne sont pas distinguées par les invariants de type fini (au sens de Goussarov-Habiro) de degré  $\leq k$ .

**Remarque 1.32.** La réciproque est vraie pour les sphères d'homologie entière ([H, §8.4.2]). M. Goussarov affirme ([G1, Thm. 3]) qu'il en est de même pour les cylindres d'homologie (voir §2.1.1) : comme pour le théorème 1.27, une preuve partielle peut-être donnée grâce à la notion d'invariant partiellement défini (cf Remarque 1.28).

## 1.4 Lemmes techniques sur les arbres de clasper

### 1.4.1 Lemmes sur les arbres stricts

**Lemme 1.33 (Changement de croisement côté-côté).** [H, Prop. 4.6]

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres stricts pour  $\gamma$  disjoints dans  $M$  de  $C$ -degré respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $T'_1 \cup T'_2$  la forêt obtenue de  $T_1 \cup T_2$  en changeant un croisement entre un côté de  $T_1$  et un côté de  $T_2$ . Alors dans  $M$

$$\gamma_{T_1 \cup T_2} \mapsto_{C_{k_1+k_2+1}} \gamma_{T'_1 \cup T'_2}.$$

*Démonstration.* Dans une petite boule, on peut voir ce changement de croisement comme dans la partie gauche de la figure 11. Par application des mou-

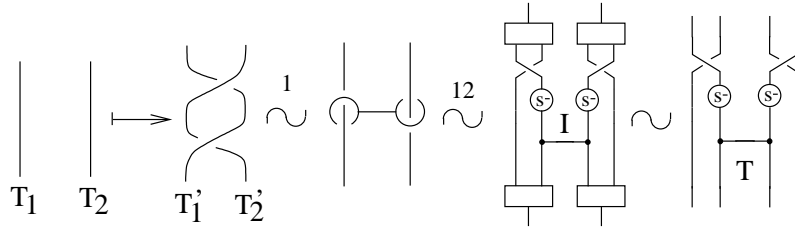


FIG. 11 –

vements 1 et 12 d'Habiro,  $T'_1 \cup T'_2$  est équivalent au clasper avec deux boîtes représenté dans la figure 11, et en prenant comme sous-arbre entrée  $I$  le sous-arbre (à deux sommets) portant les deux demi-twist, on peut pousser ces boîtes par le lemme 1.13 :  $T'_1 \cup T'_2 \sim P \cup Q$ , avec  $P \sim (T'_1 \cup T'_2) \ominus I = T_1 \cup T_2$  et  $Q$  un arbre à  $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 2 = k_1 + k_2$  sommets. Le résultat suit.  $\square$

**Lemme 1.34 (Glissement de côté).** [H, Prop. 4.5]

Soit  $T$  un arbre de clasper strict pour  $\gamma$  dans  $M$  de  $C$ -degré  $k$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu en faisant passer un côté de  $T$  à travers  $\gamma$ . Alors, on a dans  $M$

$$\gamma_T \mapsto_{C_{k+1}} \gamma_{T'}.$$

*Démonstration.* D'après le mouvement 1 d'Habiro,  $T'$  est équivalent à l'union de  $T$  et d'un clasper basique dont une feuille enlace le côté de  $T$ , son autre feuille étant une copie d'un méridien de  $\gamma$ . En appliquant le mouvement 12 d'Habiro, on obtient que  $T'$  est équivalent au clasper avec deux boîtes représenté dans la figure 12.

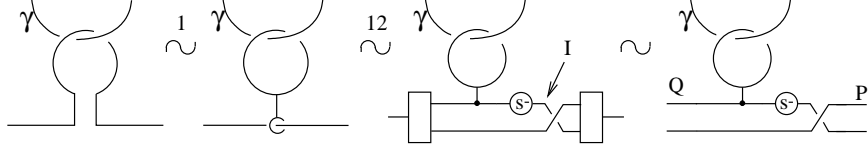


FIG. 12 –

Par l'application du lemme 1.13 de poussement de boîtes (en prenant pour sous-arbre entrée  $I$  le sous-arbre à un sommet incident à  $K$ ), on a :  $T'$  est équivalent à l'union disjointe  $P \cup Q$ , avec  $P \sim T' \ominus I = T$  et  $Q$  un arbre de  $C$ -degré  $k + 1$  (i.e. à  $k$  sommets). D'où  $\gamma_{T'} \simeq \gamma_{P \cup Q} \simeq (\gamma_P)_Q \simeq (\gamma_T)_Q$ , c'est-à-dire que  $\gamma_{T'}$  est obtenu de  $\gamma_T$  par un  $C_{k+1}$ -mouvement.  $\square$

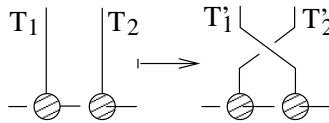
**Remarque 1.35.** Comme noté par K. Habiro (preuve de [H, Thm. 4.3]), une conséquence du Lemme 1.34 est la suivante :

*Soit  $T$  un arbre de clasper strict pour  $\gamma$  dans  $M$  de  $C$ -degré  $k$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu de  $T$  en changeant un croisement entre deux côtés de  $T$ , ou en effectuant un twist complet sur un côté de  $T$ . Alors, on a dans  $M$*

$$\gamma_T \mapsto_{C_{k+1}} \gamma_{T'}.$$

**Lemme 1.36 (Echange de feuilles disquées).** [H, Prop. 4.4]

*Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres stricts pour  $\gamma$  disjoints dans  $M$  de  $C$ -degré respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $T'_1 \cup T'_2$  la forêt obtenue en passant une feuille disquée*



*$f_1$  de  $T_1$  à travers une feuille disquée  $f_2$  de  $T_2$  - voir ci-dessus. Alors dans  $M$*

$$\gamma_{T_1 \cup T_2} \mapsto_{C_{k_1+k_2}} \gamma_{T'_1 \cup T'_2}.$$

*Démonstration.* Comme on l'a fait remarquer précédemment, on peut librement changer les feuilles disquées par des feuilles pour effectuer les calculs : on considère donc la feuille associée à  $f_1$ . Par isotopie de cette feuille, puis application des mouvements 7 et 12 d'Habiro (en notant que l'insertion d'un demi-twist sur un côté est nécessaire pour l'application de ce dernier), on

obtient un clasper équivalent à  $T'_1 \cup T'_2$  avec deux boîtes, et dans lequel on distingue un sous-arbre entrée  $I$  à un sommet (voir Figure 13). Le résultat

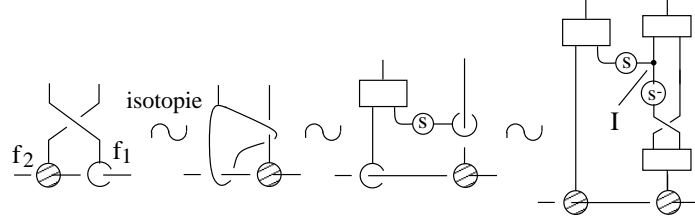


FIG. 13 –

découle donc de l'application du lemme 1.13 à ce clasper.  $\square$

Notons que l'on ne dispose pas d'un résultat analogue pour deux feuilles disquées d'un même arbre strict.

#### 1.4.2 Lemmes sur les arbres acceptables

Les deux premiers lemmes sont les équivalents pour les arbres acceptables des lemmes 1.34 et 1.33, et se prouvent de manière identique.

**Lemme 1.37 (Glissement de côté).** [GGP, Cor. 4.2]

*Soit  $T$  un arbre de clasper pour  $\gamma$  dans  $M$  de  $Y$ -degré  $k$ , et  $K$  un nœud en bandes dans  $M$  disjoint de  $\gamma$  et de  $T$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu en faisant la somme connexe d'un côté  $e$  de  $T$  avec  $K$ . Alors*

$$(M, \gamma)_T \mapsto_{Y_{k+1}} (M, \gamma)_{T'}.$$

**Lemme 1.38 (Changement de croisement côté-côté).** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres pour  $\gamma$  disjoints dans  $M$  de  $Y$ -degré respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $T'_1 \cup T'_2$  la forêt obtenue de  $T_1 \cup T_2$  en changeant un croisement entre un côté de  $T_1$  et un côté de  $T_2$ . Alors*

$$(M, \gamma)_{T_1 \cup T_2} \mapsto_{Y_{k_1+k_2+2}} (M, \gamma)_{T'_1 \cup T'_2}.$$

Le lemme suivant est clair d'après la preuve du lemme 1.36 :

**Lemme 1.39 (Changement de croisement feuille-côté).** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres acceptables pour  $\gamma$  disjoints dans  $M$  de  $Y$ -degré respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $T'_1 \cup T'_2$  la forêt obtenue de  $T_1 \cup T_2$  en changeant un croisement entre une feuille de  $T_1$  et un côté de  $T_2$ . Alors,*

$$(M, \gamma)_{T_1 \cup T_2} \mapsto_{Y_{k_1+k_2+1}} (M, \gamma)_{T'_1 \cup T'_2}.$$

**Lemme 1.40. (Changement de croisement feuille-feuille sur une forêt).** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux arbres acceptables pour  $\gamma$  disjoints dans  $M$*

de  $Y$ -degré respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $T'_1 \cup T'_2$  la forêt obtenue de  $T_1 \cup T_2$  en changeant un croisement entre une feuille de  $T_1$  et une feuille de  $T_2$ . Alors

$$(M, \gamma)_{T_1 \cup T_2} \mapsto_{Y_{k_1+k_2}} (M, \gamma)_{T'_1 \cup T'_2}.$$

*Démonstration.* Dans une petite boule, on peut voir ce changement de croisement comme dans la partie gauche de la figure ci-dessous. Par application

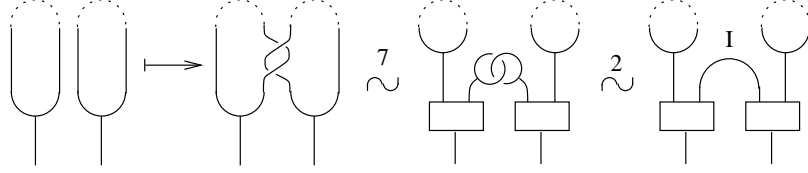


FIG. 14 –

des mouvements 7 et 2 d'Habiro,  $T'_1 \cup T'_2$  est équivalent au clasper avec deux boîtes représenté dans la figure 14. Le résultat suit de l'application du lemme 1.13 (en prenant comme sous-arbre entrée  $I$  le sous-arbre à zéro sommets de la figure) :  $T'_1 \cup T'_2 \sim P \cup Q$ , avec  $P \sim T_1 \cup T_2$  et  $Q$  un arbre à  $k_1 + k_2$  sommets.  $\square$

En suivant exactement les mêmes idées, on prouve le résultat suivant, concernant un changement de croisement entre deux feuilles d'un même arbre :

**Lemme 1.41. (Changement de croisement feuille-feuille sur un arbre).** Soit  $T$  un arbre acceptable pour  $\gamma$  dans  $M$  de  $Y$ -degré  $k \geq 2$ . Soit  $T'$  l'arbre obtenu en changeant un croisement entre deux feuilles  $F_1$  et  $F_2$  de  $T$ . Alors

$$(M, \gamma)_T \sim_{Y_{k+1}} (M, \gamma)_{T' \cup \tilde{T}},$$

où  $\tilde{T}$  est obtenu de  $T$  en connectant les côtés incidents à  $F_1$  et  $F_2$ .

**Lemme 1.42 (Scindement de feuille).** [GGP, Cor. 4.3]

Soit  $T$  un arbre de clasper acceptable pour  $\gamma$  dans  $M$  de  $Y$ -degré  $k$ , et  $f$  une feuille de  $T$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux feuilles obtenues en scindant  $f$  le long d'un arc  $\alpha$  allant du point d'attachement à un autre point de  $f$  (voir Fig. 15). Soient  $T_1$  et  $T_2$  les arbres de  $Y$ -degré  $k$  obtenus de  $T$  en remplaçant  $f$  par  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Alors

$$(M, \gamma)_T \sim_{Y_{k+1}} (M, \gamma)_{T_1 \cup T_2}.$$

*Démonstration.* En appliquant le mouvement 7 d'Habiro à la feuille  $f$ , on fait apparaître une boîte avec, en entrée, les feuilles  $f_1$  et  $f_2$ . Puis, on applique le lemme 1.13 pour pousser cette boîte en prenant, disons, la feuille  $f_2$  et son côté incident dans le rôle du sous-arbre entrée  $I$  :  $T \sim P \cup Q$ , avec  $P \sim T \ominus I = T_1$  et  $Q$  un arbre à de  $Y$ -degré  $k$ . Plus précisément, la

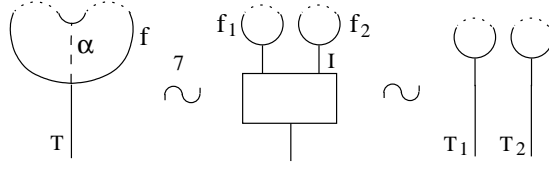


FIG. 15 –

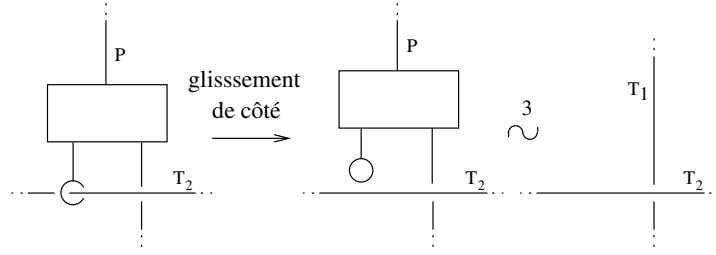


FIG. 16 –

procédure de poussement de boîtes donne dans ce cas :  $Q = T_2$ , et  $P \sim T_1$  diffère de  $T_1$  dans un voisinage de  $T_2$  par des boîtes avec de petites feuilles triviales enlaçant les côtés de  $T_2$ , comme dans la figure 16.

Au niveau de chaque telle boîte, on peut alors appliquer le lemme 1.37 pour glisser le côté de  $T_2$  le long d'un petit méridien de la feuille, ce qui ne modifie pas la classe de  $Y_{k+1}$ -équivalence de  $\gamma_T$  (voir la figure 16) : par le mouvement 3 d'Habiro, le clasper obtenu est équivalent à  $T_1$ . On a donc bien  $\gamma_T \simeq \gamma_{P \cup Q} \sim_{Y_{k+1}} \gamma_{T_1 \cup T_2}$ .  $\square$

## 2 Cylindres d'homologie et string-links

Les cylindres d'homologie et les string-links sont d'importants objets de la théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro : ils apparaissent en effet dans [H] et dans [G1]. Dans cette section, nous rappelons la définition de ces objets et énonçons les principaux résultats de cette thèse.

### 2.1 Cylindres d'homologie

#### 2.1.1 Définitions et notations

Soit  $\Sigma$  une surface compacte, connexe et orientée de genre  $g \geq 0$ , éventuellement à bord. Par la suite, on désignera la variété produit  $\Sigma \times I$  par  $1_\Sigma$ , et on notera  $H$  le premier groupe d'homologie entière de cette surface :  $H = H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$ .

**Définition 2.1.** Un *cobordisme d'homologie* sur  $\Sigma$  est un triple  $(M, i^+, i^-)$  où  $M$  est une 3-variété compacte orientée et  $i^\pm : \Sigma \longrightarrow M$  sont des plongements orientés d'images  $\Sigma^\pm$ , tels que :

- (i)  $i^\pm$  sont des isomorphismes en homologie ;
- (ii)  $\partial M = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^-)$  et  $\Sigma^+ \cap (-\Sigma^-) = \pm \partial \Sigma^\pm$  ;
- (iii)  $i^+|_{\partial \Sigma} = i^-|_{\partial \Sigma}$ .

Les cobordismes d'homologie sont considérés à difféomorphisme conservant l'orientation près, et on note  $\mathcal{C}(\Sigma)$  l'ensemble des classes d'équivalence des cobordismes d'homologie sur  $\Sigma$ .

Si  $M = (M, i^+, i^-)$  et  $N = (N, j^+, j^-)$  sont des cobordismes d'homologie, on peut définir leur *produit d'empilement* par

$$M \cdot N := (M \cup_{i^- \circ (j^+)^{-1}} N, i^+, j^-).$$

Ce produit munit  $\mathcal{C}(\Sigma)$  d'une structure de monoïde. L'élément unité est  $1_\Sigma := (\Sigma \times I, Id_0, Id_1)$ , où  $I$  désigne l'intervalle unité  $[0, 1]$  et où  $Id_\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ) est la composée de  $Id \times \{\varepsilon\}$  avec un collier de  $\Sigma \times \{\varepsilon\}$  tiré le long de  $\partial \Sigma \times I$ , de telle sorte que la seconde condition de la définition 2.1 soit bien remplie.

Pour tout cobordisme d'homologie  $M = (M, i^+, i^-) \in \mathcal{C}(\Sigma)$ , l'application  $i^\pm$  induit un isomorphisme au niveau de chaque quotient nilpotent (par le théorème de Stallings [S])

$$(i^\pm)_k : \frac{\pi}{\pi_k} \xrightarrow{\simeq} \frac{\pi_1(M)}{(\pi_1(M))_k},$$

où  $\pi$  désigne le groupe fondamental de  $\Sigma$ , et  $\pi_k$  désigne le  $k^{ieme}$  terme de sa série centrale descendante, initialisée en  $\pi_1 = \pi$ . En considérant la composée  $(i^-)_k^{-1} \circ (i^+)_k$ , chaque cobordisme d'homologie  $M = (M, i^+, i^-)$

induit donc un automorphisme de  $\pi/\pi_k$  : on note  $\mathcal{C}(\Sigma)[k]$  le sous-monoïde des cobordismes d'homologie qui induisent l'identité sur  $\pi/\pi_{k+1}$ .<sup>7</sup>

**Définition 2.2.** Lorsque  $(i^-)_2^{-1} \circ (i^+)_2 : H_1(\Sigma; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Sigma; \mathbf{Z})$  est l'identité, on dit que  $M$  est un *cylindre d'homologie*.

On note  $\mathcal{HC}(\Sigma) := \mathcal{C}(\Sigma)[1]$  le sous-monoïde des cylindres d'homologie sur  $\Sigma$ .

### 2.1.2 $Y_k$ -équivalence pour les cylindres d'homologie

Comme K. Habiro dans [H], on peut définir une filtration descendante de monoïdes

$$\mathcal{C}(\Sigma) \supset \mathcal{C}_1(\Sigma) \supset \mathcal{C}_2(\Sigma) \supset \cdots \supset \mathcal{C}_k(\Sigma) \supset \cdots$$

où  $\mathcal{C}_k(\Sigma)$  est le sous-monoïde des cobordismes d'homologie  $Y_k$ -équivalents au cobordisme trivial  $1_\Sigma$ . La proposition suivante est démontrée dans §2.3.2, à la fin de ce chapitre.

**Proposition 2.3.** 1. Pour  $\Sigma$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 0$  avec au plus une composante de bord, alors

$$\mathcal{C}_1(\Sigma) = \mathcal{HC}(\Sigma).$$

2. Pour  $\Sigma$  une surface compacte orientée de genre 0 avec  $n \geq 2$  composantes de bord, alors

$$\mathcal{HC}(\Sigma) = \mathcal{C}(\Sigma), \text{ et } \mathcal{C}_1(\Sigma) = \mathcal{C}(\Sigma)[2].$$

L'objet de notre étude est le monoïde quotient  $\overline{\mathcal{C}}_k(\Sigma) := \mathcal{C}_k(\Sigma)/Y_{k+1}$ .

**Proposition 2.4.** Soit  $\Sigma$  une surface compacte, connexe, orientée quelconque. Alors, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\overline{\mathcal{C}}_k(\Sigma)$  est un groupe abélien.

Une preuve est donnée dans §2.3.3. On montre de même que, pour tout  $1 \leq k \leq l$ ,  $\mathcal{C}_k(\Sigma)/Y_l$  est un groupe.

Pour  $k \geq 2$ , K. Habiro donne une borne supérieure combinatoire pour le groupe abélien  $\overline{\mathcal{C}}_k(\Sigma)$ . Plus précisément, il définit le groupe abélien  $\mathcal{A}_k(H)$  (finiment) engendré par les diagrammes unitrivalents de degré interne  $k$ , avec une orientation cyclique en chaque sommet trivalent et dont les sommets univalents sont coloriés par des éléments de  $H$  et sont totalement ordonnés. Ces graphes sont considérés modulo les relations AS, IHX et Multilinéarité habituelles, et à une certaine relation “STU-like” près concernant l'ordre des sommets univalents. Dans le cas clos, certaines relations de type symplectique doivent être ajoutées. Ainsi, on a une *application de chirurgie* surjective

$$\mathcal{A}_k(H) \xrightarrow{\psi_k} \overline{\mathcal{C}}_k(\Sigma)$$

---

<sup>7</sup>Ce monoïde est noté  $\mathcal{M}_{g,1}^{h,c}[k]$  dans [Ha1] pour le cas  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ .



envoyant chaque graphe  $G$  sur  $(1_\Sigma)_{\tilde{G}}$ , où  $\tilde{G}$  est un clasper de la variété  $1_\Sigma$  de graphe abstrait associé  $G$ , dont les feuilles sont empilées à partir de la surface du haut  $\Sigma \times 1$  suivant l'ordre total, framées le long de cette surface et plongées suivant l'étiquette du sommet univalent correspondant.

Le fait que ces applications sont bien définies provient de calculs de claspers.

Dans le cas  $k = 1$ , K. Habiro ne définit pas d'espace de diagrammes mais annonce les isomorphismes suivants, pour les cas  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  ou  $\Sigma_g$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \simeq \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2 \\ \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) \simeq \Lambda^3 H / (\omega \wedge H) \oplus \Lambda^2 H_{(2)} / \omega_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2 \end{cases} \quad (1)$$

où  $H_{(2)} = H \otimes \mathbf{Z}_2$  et où

$$\omega = \sum_{i=1}^g x_i \wedge y_i \in \Lambda^2 H$$

est l'élément *symplectique*.<sup>8</sup> Ce fait a été utilisé par la suite dans [Lev1].

Le but de cette section est d'établir ces isomorphismes, de façon diagrammatique, en définissant à nouveau une application de chirurgie

$$\mathcal{A}_1(P) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma),$$

et ce quelle que soit la surface  $\Sigma$ . L'espace de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P)$  et l'application  $\psi$  s'avèrent être substantiellement différents des  $\mathcal{A}_k(H)$  et  $\psi_k$  pour  $k > 1$ , rendant le cas  $k = 1$  exceptionnel. En effet, leur définition fait intervenir le groupe d'homologie  $H$  et  $Spin(\Sigma)$ , l'ensemble des *structures spin* sur  $\Sigma$ . Rappelons que l'on peut voir l'ensemble  $Spin(\Sigma)$  comme

$$Spin(\Sigma) = \{\sigma \in H^1(U\Sigma; \mathbf{Z}_2) / i^*(\sigma) \neq 0 \in \mathbf{Z}_2\},$$

où

$$S^1 \xrightarrow{i} U\Sigma \xrightarrow{p} \Sigma$$

désigne le fibré tangent unitaire de la surface.  $Spin(\Sigma)$  a une structure de  $H^1(\Sigma; \mathbf{Z}_2)$ -espace affine, d'action donnée par

$$\forall \sigma \in Spin(\Sigma), \forall x \in H^1(\Sigma; \mathbf{Z}_2), \quad x \cdot \sigma := \sigma + p^*(x).$$

Ainsi, parmi les applications  $Spin(\Sigma) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ , on distingue les applications affines, et plus généralement les *polynômes Booléens*, qui sont des sommes de produits d'applications affines (voir [J4, §2]). Ces polynômes forment une  $\mathbf{Z}_2$ -algèbre notée  $B := B(\Sigma)$ , filtrée par le *degré* :

$$B^{(0)} \subset B^{(1)} \subset \dots \subset B^{(k)}.$$

---

<sup>8</sup>On rappelle que l'algèbre extérieure  $\Lambda(H)$  est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle  $T(H)$  par l'idéal bilatère engendré par les éléments  $x \otimes x$  ;  $x \in H$ .

Par exemple,  $B^{(1)}$  est l'espace des fonctions affines sur  $Spin(\Sigma)$ ; la fonction constante  $\bar{1} : Spin(\Sigma) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$  envoyant tout  $\sigma$  sur 1 et, pour  $h \in H$ , la fonction  $\bar{h}$  envoyant chaque  $\sigma$  sur  $\langle \sigma, \tilde{h} \rangle$  sont des fonctions affines. Ici,  $\tilde{h} \in H_1(U\Sigma; \mathbf{Z}_2)$  est le *relevé canonique* de  $h$ , défini par Johnson dans [J1, §3]. Plus précisément, si  $h$  est représenté par une courbe fermée simple  $c$  de  $\Sigma$ , on note  $\vec{c}$  son relevé dans  $U\Sigma$  obtenu en framant  $c$  par le champ de vecteurs tangent à la courbe. On note  $z$  la classe de la fibre, c'est-à-dire l'image par  $i_*$  du générateur de  $\mathbf{Z}_2 \simeq H_1(S^1; \mathbf{Z}_2)$ . Alors

$\tilde{h}$  est la classe d'homologie de  $\vec{c} + z$ .

Notons ([J1, Thm. 1B]) que  $\widetilde{h_1 + h_2} = \widetilde{h_1} + \widetilde{h_2} + (h_1 \cdot h_2)z, \forall h_1, h_2 \in H$ , où  $\cdot$  désigne la forme d'intersection sur  $H$ . On en déduit l'égalité suivante :

$$\forall h_1, h_2 \in H, \quad \overline{h_1 + h_2} = \overline{h_1} + \overline{h_2} + (h_1 \cdot h_2) \cdot \bar{1} \in B^{(1)}. \quad (2)$$

Pour toute base  $(e_i)_{i=1}^{2g+n-1}$  de  $H = H_1(\Sigma_{g,n}, \mathbf{Z})$ , on a un isomorphisme d'algèbres :

$$B \simeq \frac{\mathbf{Z}_2[t_1, \dots, t_{2g+n-1}]}{t_i^2 = t_i} \quad (3)$$

envoyant  $\bar{1}$  sur 1 et  $\bar{e}_i$  sur  $t_i$ . Notons en particulier que d'après (3) on a  $B(\Sigma_g) \simeq B(\Sigma_{g,1})$ .

### 2.1.3 $Y_2$ -équivalence pour les cylindres sur une surface avec au plus une composante de bord

Dans cette section, on caractérise la  $Y_2$ -équivalence pour les cylindres d'homologie sur une surface compacte connexe orientée  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  ou  $\Sigma_g$ . Ceci fait l'objet d'une publication, [MM], qui est **un travail commun avec G. Massuyeau**.

**Le groupe de Torelli abelianisé.** K. Habiro souligne dans [H, §8.5] le fait que les cylindres d'homologie peuvent servir de puissant outil pour l'étude du mapping class group d'une surface (voir [GL], [Ha1], [Lev1]). La correspondance repose sur l'homomorphisme de monoïdes

$$\mathcal{T}(\Sigma) \xrightarrow{C} \mathcal{HC}(\Sigma)$$

envoyant chaque  $h$  du groupe de Torelli de  $\Sigma$  sur le mapping cylindre  $C_h = (\Sigma \times I, Id_0, h)$  (où, comme précédemment, un collier de  $\Sigma^\pm$  est tiré le long de  $\partial\Sigma \times I$ ).

Restreignons nous aux cas  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  et  $\Sigma_g$ . Les notations usuelles  $\mathcal{T}_{g,1} = \mathcal{T}(\Sigma_{g,1})$  et  $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}(\Sigma_g)$  pour les groupes de Torelli seront utilisées. On notera de plus  $B_g$  la  $\mathbf{Z}_2$ -algèbre  $B(\Sigma_g) \simeq B(\Sigma_{g,1})$ .

Rappelons de [J2] que les *homomorphismes de Birman-Craggs* peuvent être rassemblés dans un unique homomorphisme (suivant que l'on considère le cas à bord ou le cas clos)

$$\mathcal{T}_{g,1} \xrightarrow{\beta} B_g^{(3)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{T}_g \xrightarrow{\beta} \frac{B_g^{(3)}}{\alpha \cdot B_g^{(1)}},$$

où  $\alpha \in B_g^{(2)}$  est la fonction Booléenne quadratique

$$\alpha = \sum_{i=1}^g \overline{x_i} \cdot \overline{y_i}, \quad (4)$$

connue sous le nom d'*invariant de Arf*. Rappelons aussi de [J3] que le *premier homomorphisme de Johnson* est un homomorphisme

$$\mathcal{T}_{g,1} \xrightarrow{\eta_1} \Lambda^3 H \quad \text{ou} \quad \mathcal{T}_g \xrightarrow{\eta_1} \frac{\Lambda^3 H}{\omega \wedge H}.$$

Formons le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)} & \xrightarrow{\quad} & B_g^{(3)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow q \\ \Lambda^3 H & \xrightarrow{- \otimes \mathbf{Z}_2} & \Lambda^3 H_{(2)}, \end{array}$$

où l'application  $q$  est la projection canonique  $B_g^{(3)} \longrightarrow B_g^{(3)}/B_g^{(2)}$  suivie de l'isomorphisme  $B_g^{(3)}/B_g^{(2)} \simeq \Lambda^3 H_{(2)}$  qui identifie le polynôme cubique  $\overline{h_1} \cdot \overline{h_2} \cdot \overline{h_3}$  avec  $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3$  (ce qui est bien défini par (2) et (3)). On note  $S$  le sous-groupe de ce pullback correspondant à  $\omega \wedge H \subset \Lambda^3 H$  et  $\alpha \cdot B_g^{(1)} \subset B_g^{(3)}$ . Johnson a montré dans [J4] que, sous l'hypothèse  $g \geq 3$ , les homomorphismes  $\eta_1$  et  $\beta$  induisent les isomorphismes

$$(\mathcal{T}_{g,1})_{Ab} \xrightarrow[\simeq]{(\eta_1, \beta)} \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)} \quad \text{et} \quad (\mathcal{T}_g)_{Ab} \xrightarrow[\simeq]{(\eta_1, \beta)} \frac{\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}}{S}.$$

**Remarque 2.5.** Notons que, par (3), les espaces buts de ces applications sont respectivement non canoniquement isomorphes à  $\Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$  et  $\Lambda^3 H/(\omega \wedge H) \oplus \Lambda^2 H_{(2)}/\omega_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$ .

**Enoncé des résultats.** Dans §3.1, on va construire l'espace de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P)$  et l'application de chirurgie  $\psi : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  annoncés dans la section précédente. Les structures spin jouent un rôle important dans ces

définitions. Ensuite, on donnera dans §3.1.4 un isomorphisme de groupes abéliens  $\rho : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$ .

Observons que,  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  étant un groupe abélien, la construction du mapping cylindre induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$(\mathcal{T}(\Sigma))_{Ab} \xrightarrow{C} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma).$$

Comme l'ont signalé S. Garoufalidis et J. Levine dans [GL] et [Lev1], les homomorphismes de Johnson et de Birman-Craggs se factorisent par l'application mapping cylindre  $C : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{HC}(\Sigma)$ . Ces extensions seront détaillées dans §3.2.1 et §3.2.2.

Les deux théorèmes suivants seront prouvés dans §3.2.3.

**Théorème 2.6.** *Dans le cas à bord, le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xleftarrow{C} & (\mathcal{T}_{g,1})_{Ab} \\ & \searrow \rho & \downarrow (\eta_1, \beta) & & \swarrow (\eta_1, \beta) \\ & & \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)} & & \end{array}$$

*commute et toutes ses flèches sont des isomorphismes, exceptées les deux applications partant de  $(\mathcal{T}_{g,1})_{Ab}$  lorsque  $g < 3$ .*

**Théorème 2.7.** *Dans le cas clos, le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathcal{A}_1(P)}{\rho^{-1}(S)} & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) & \xleftarrow{C} & (\mathcal{T}_g)_{Ab} \\ & \searrow \rho & \downarrow (\eta_1, \beta) & & \swarrow (\eta_1, \beta) \\ & & \underbrace{\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}}_S & & \end{array}$$

*commute et toutes ses flèches sont des isomorphismes, exceptées les deux applications partant de  $(\mathcal{T}_g)_{Ab}$  lorsque  $g < 3$ .*

Notons que les théorèmes 2.6 et 2.7 et la remarque 2.5 donnent les isomorphismes d'Habiro (1), non canoniques.

On déduit aisément de ce qui précède le corollaire suivant, qui caractérise les invariants de type fini (au sens Goussarov-Habiro) de degré 1 pour les cylindres d'homologie sur  $\Sigma_{g,1}$  ou  $\Sigma_g$ .

**Corollaire 2.8.** *Pour  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  ou  $\Sigma_g$ , soient  $M$  et  $M'$  deux cylindres d'homologie sur  $\Sigma$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$M$  et  $M'$  sont  $Y_2$ -équivalents ;*

(2)  $M$  et  $M'$  ne sont pas distingués par les invariants de Goussarov-Habiro de degré 1 ;

(3)  $M$  and  $M'$  ne sont pas distingués par le premier homomorphisme de Johnson, ni par les homomorphismes de Birman-Craggs.

Enfin, si on se fixe un plongement  $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_g$ , il y a une application évidente de “rebouchage”  $\mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \mathcal{C}_1(\Sigma_g)$ , à travers laquelle les diagrammes commutatifs des théorèmes 2.6 et 2.7 sont compatibles. Voir §3.2.3 pour un énoncé précis.

### 2.1.4 $Y_2$ -équivalence pour les cylindres sur une surface avec plus d’une composante de bord

Le théorème 2.6 pour les cylindres d’homologie sur une surface de genre  $g \geq 0$  avec une composante de bord peut en partie se généraliser au cas d’une surface  $\Sigma_{g,n}$  de genre  $g \geq 0$  à  $n \geq 1$  composante(s) de bord. En effet, on définit pour tout  $g \geq 0, n \geq 1$  un espace de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  et une application de chirurgie  $\psi : \mathcal{A}_1(P_{g,n}) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$  comparables à ceux intervenant dans les théorèmes précédents. Le théorème suivant affirme que cette application de chirurgie est un isomorphisme.

**Théorème 2.9.** *Pour tout  $g \geq 0, n \geq 1$  l’application de chirurgie*

$$\mathcal{A}_1(P_{g,n}) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$$

*est un isomorphisme de groupes abéliens.*

La démonstration de ce théorème, ainsi que les définitions de  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  et de  $\psi$ , sont donnés dans §3.3.

## 2.2 String-links

### 2.2.1 Définitions et notations

Soit  $\Sigma$  une surface compacte, connexe, orientée, et  $x_1, \dots, x_n$   $n$  points fixés à l’intérieur de  $\Sigma$ . Soit  $M$  une 3-variété à bord, compacte et orientée, dont le bord s’identifie à  $\partial(\Sigma \times I)$  (un cobordisme d’homologie sur  $\Sigma$ , par exemple).

**Définition 2.10.** On appelle *string-link* à  $n$  cordes dans  $M$ , aussi appelé *enlacement d’intervalles* ou *enchevêtrements purs*, un plongement propre (et lisse) dans  $M$

$$\sigma : \bigsqcup_{i=1}^n I_i \longrightarrow M$$

de  $n$  copies disjointes  $I_i$  de l’intervalle unité tel que, pour tout  $i$ , l’image  $\sigma_i$  de  $I_i$  va de  $(x_i, 0)$  à  $(x_i, 1)$  (via l’identification  $\partial M = \partial(\Sigma \times I)$ ). On appelle  $\sigma_i$  la  $i^{\text{ème}}$  corde de  $\sigma$ .

Notons que chaque corde d'un string-link est munie d'une orientation induite par l'orientation naturelle de l'intervalle unité  $I$ .

Un *string-link framé* à  $n$  cordes dans  $M$  est un string-link  $\sigma$  équipé d'une classe d'isotopie de sections non singulières de son fibré normal dont la restriction sur le bord est fixée. Autrement dit,  $\sigma$  est un plongement propre (et lisse) dans  $M$

$$\sigma : \bigsqcup_{i=1}^n I_i \times [0, \varepsilon] \longrightarrow M$$

de  $n$  copies disjointes de l'intervalle unité épaissi ( $\varepsilon > 0$ ) tel que, pour tout  $i$ , l'image de  $I_i \times \{0\}$  va de  $(x_i, 0)$  à  $(x_i, 1)$ .

Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés à bord telles que  $\partial M = \partial M' = \partial(\Sigma \times I)$ ; On définit le *produit* de deux string-links à  $n$  cordes  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  en empilant  $\sigma$  sur  $\sigma'$  dans le produit  $M \cdot M'$ , réalisé en identifiant  $\Sigma \times \{1\} \subset \partial M$  avec  $\Sigma \times \{0\} \subset \partial M'$ .

$\Sigma$  étant fixée, ce produit munit l'ensemble des string-links framés à  $n$  cordes d'une structure de monoïde, avec pour élément unité la classe du string-link trivial  $1_n := \cup_i (x_i \times I)$  dans  $\Sigma \times I$ .

Par la suite, on se restreint au cas  $\Sigma = D^2$ .

On se ramène donc au cas d'étude (B) annoncé dans l'introduction. On note  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$  le monoïde des (classes de difféomorphisme par rapport au bord des) string-links framés à  $n$  cordes des boules d'homologie (dont le bord s'identifie à  $\partial(D^2 \times I)$ ), avec pour élément neutre  $(D^2 \times I, 1_n)$ .

Si de plus on choisit de se restreindre au cas des string-links dans  $D^2 \times I$ , et que l'on ne tient plus compte du framing,<sup>9</sup> on est dans le cas d'étude (C), c'est-à-dire le cas des string-links *classiques*. On note  $\mathcal{SL}(n)$  le monoïde des (classes d'isotopie ambiante par rapport au bord des) string-links à  $n$  cordes, d'élément neutre  $1_n$ .

*Notations 2.11.* Par la suite,  $D_n^2 := D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \cong \Sigma_{0,n+1}$  désignera le disque à  $n$  trous. Comme dans la section précédente,  $H := H_1(D_n^2, \mathbf{Z})$  désignera le premier groupe d'homologie entière de la surface, et on notera de même  $H_{(2)} := H_1(D_n^2, \mathbf{Z}_2)$ . On utilisera fréquemment la notation  $1_{D^2}$  pour désigner le produit  $D^2 \times I$ .

**Définition 2.12.** Soit  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)$ . On note  $\hat{M} := M \cup -(D^2 \times I)$  la sphère d'homologie obtenue en attachant, *via* l'identification  $\partial M = \partial(D^2 \times I)$ , les  $D^2 \times \{\epsilon\} \subset \partial M$  aux  $D^2 \times \{(1 - \epsilon)\} \subset \partial(D^2 \times I)$  ( $\epsilon = 0, 1$ ) et en identifiant les  $\partial D^2 \times I$ . Au niveau des string-links, cette opération envoie  $\sigma$  sur un entrelacs framé orienté  $\hat{\sigma}$  à  $n$  composantes de  $\hat{M}$ .

---

<sup>9</sup>D'après la définition 2.10, l'oubli du framing sur un string-link  $\tilde{\sigma}$  consiste juste à prendre la restriction  $\sigma := \tilde{\sigma}|_{\bigsqcup_i I_i \times \{0\}}$ .

$(\hat{M}, \hat{\sigma})$  est appelé la *fermeture* de  $(M, \sigma)$ . En particulier, pour  $M = 1_{D^2}$ , on retrouve la notion classique de fermeture d'un string-link (voir [HL, §2]).

Pour  $(M, \sigma)$  un string-link dans une boule d'homologie  $M$ , on note  $i_0$  et  $i_1$  les inclusions de  $D_n^2$  respectivement dans les bords inférieurs et supérieurs du complémentaire  $M^\sigma := M \setminus \sigma$  (via l'identification  $\partial M = \partial(D^2 \times I)$ ) :

$$D_n^2 \xrightarrow{i_\epsilon} (D_n^2)_\epsilon \subset \partial M^\sigma$$

où  $(D_n^2)_\epsilon := (D_n^2) \times \{\epsilon\}$ ,  $\epsilon = 0, 1$ . Par le théorème de Stallings ([S]), ces inclusions induisent des isomorphismes au niveau de chaque quotient nilpotent du groupe fondamental :

$$(i_\epsilon)_* : \frac{\pi_1((D_n^2)_\epsilon)}{(\pi_1((D_n^2)_\epsilon))_k} = \frac{F}{F_k} \xrightarrow{\simeq} \frac{\pi_1(M^\sigma)}{(\pi_1(M^\sigma))_k},$$

où  $F$  désigne le groupe libre à  $n$  générateurs, et  $F_k$  est le  $k^{ieme}$  terme de sa série centrale descendante. Ainsi, tout élément de  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$  induit un automorphisme de  $F/F_{k+1}$ , par sa  $k^{ieme}$  représentation d'Artin

$$\mathcal{A}_k : \mathcal{SL}^{hb}(n) \longrightarrow \text{Aut}(F/F_{k+1})$$

$$\sigma \longmapsto (i_1)_{k+1}^{-1} \circ (i_0)_{k+1}$$

De plus,  $\mathcal{A}_k(\sigma)$  vit dans  $\text{Aut}_0(F/F_{k+1}) \subset \text{Aut}(F/F_{k+1})$ , le sous-groupe des automorphismes de  $F/F_{k+1}$  envoyant chaque générateur  $x_i$  de  $F$  sur un conjugué de  $x_i$  et laissant inchangé leur produit  $x_1 x_2 \dots x_n$  [HL]. On note

$$\mathcal{SL}^{hb}(n)[k] := \text{Ker} \mathcal{A}_k$$

le sous-monoïde des string-links induisant l'identité sur  $F/F_{k+1}$ . Notons ([HM, §5]) que  $\mathcal{SL}^{hb}(n) = \mathcal{SL}^{hb}(n)[1]$ , et que  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)[2]$  si et seulement si tous ses nombres d'enlacements et framings sont nuls.

**Remarque 2.13.** Pour  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)$ , le complémentaire  $M^\sigma$ , muni des plongements  $i_0$  et  $i_1$ , est un cobordisme d'homologie sur le disque à  $n$  trous  $D_n^2 : (M^\sigma, i_0, i_1) \in \mathcal{C}(D_n^2)$ . Ceci définit un isomorphisme

$$c : \mathcal{SL}^{hb}(n) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(D_n^2),$$

dont un inverse est donné par l'attachement de  $n$  2-anses le long des composantes de bord de  $M^\sigma$  associées aux  $n$  trous de  $D_n^2$  : les âmes de ces 2-anses  $D^2 \times I$  fournissent les  $n$  cordes du string-link (et le framing sur le disque  $D^2$  induit un framing sur cette corde). Pour tout  $k$ , l'application  $c$  induit un isomorphisme de monoïdes

$$\mathcal{SL}^{hb}(n)[k] \simeq \mathcal{C}(D_n^2)[k],$$

où  $\mathcal{C}(D_n^2)[k]$  est défini dans §2.1.1. En effet,  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)[k]$  si et seulement si  $\mathcal{A}_k(\sigma) = (i_1)_{k+1}^{-1} \circ (i_0)_{k+1} = 1$ , ce qui équivaut à dire que le cobordisme d'homologie  $(M^\sigma, i_0, i_1)$  induit l'identité au niveau de  $F/F_{k+1}$  : c'est donc par définition un élément de  $\mathcal{C}(D_n^2)[k]$ .

Cette remarque est à comparer avec [Ha1, Thm.2.1].

## 2.2.2 $Y_k$ -équivalence pour les string-links framés des boules d'homologie

On note  $\mathcal{SL}_k^{hb}(n)$  le sous-monoïde  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$  des éléments  $(M, \sigma)$  qui sont  $Y_k$ -équivalents à  $(1_{D^2}, 1_n)$ . On a la filtration descendante de monoïdes

$$\mathcal{SL}^{hb}(n) \supset \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \supset \mathcal{SL}_2^{hb}(n) \supset \dots$$

**Proposition 2.14.** *Les éléments de  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$  sont les string-links de  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$  dont les longitudes sont nul-homologues, autrement dit les string-links dont tous ses nombres d'enlacement et framings sont nuls :*

$$\mathcal{SL}_1^{hb}(n) = \mathcal{SL}^{hb}(n)[2].$$

(une preuve est donnée dans §2.3.1).

Pour  $k \geq 1$ , le monoïde quotient

$$\overline{\mathcal{SL}}_k^{hb}(n) := \mathcal{SL}_k^{hb}(n)/Y_{k+1}$$

est un groupe abélien. Ceci se démontre de manière analogue à la proposition 2.4, par des calculs de clasps standards - voir §2.3.3.

On va ici se consacrer à l'étude du cas  $k = 1$ , en établissant pour les string-links des boules d'homologie un résultat analogue à ceux de la section précédente.

Rappelons que les triples nombres de Milnor peuvent être rassemblés en un homomorphisme de monoïdes  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\mu_3} \Lambda^3 H$ , qui se factorise par  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$  en un homomorphisme de groupes abéliens (voir §4.2.4)

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\mu_3} \Lambda^3 H.$$

Par ailleurs on note, comme dans §2.1.3,  $B_{0,n+1} = B(\Sigma_{0,n+1})$  la  $\mathbf{Z}_2$ -algèbre des polynômes Booléens sur  $Spin(\Sigma_{0,n+1})$ , et  $B_{0,n+1}^{(k)}$  la partie de degré  $k$  de  $B_{0,n+1}$ . On va définir dans §4.3 un homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\tau} B_{0,n+1}^{(3)}$$

dont la définition fait intervenir la réduction modulo 2 des triples nombres de Milnor  $\mu_3$  et de l'invariant de Sato-Levine  $\beta$ , ainsi que l'invariant de Arf et le  $\mu$ -invariant de Rochlin. Ces invariants sont définis et étudiés dans §4.2.

On a alors le théorème suivant (prouvé dans §4.3), qui caractérise la  $Y_2$ -équivalence pour les string-links dans  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ .



**Théorème 2.15.** *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \\
 & \searrow \rho & \downarrow (\mu_3, \tau) \\
 & & \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_{0,n+1}^{(3)}
 \end{array}$$

*toutes les applications étant des isomorphismes.*

Ce théorème sur les string-links framés des boules d'homologie présente quelques similitudes avec le théorème 2.6 de caractérisation de la  $Y_2$ -équivalence pour les cylindres d'homologie sur une surface à une composante de bord. Cette correspondance cylindres d'homologie / string-links est étudiée dans [Ha1] : il y est montré que, *via* une certaine construction reliant ces objets, le premier homomorphisme de Johnson  $\eta_1$  coïncide avec les triples nombres de Milnor  $\mu_3$ . Le théorème 2.15 nous permet d'aller plus loin, en donnant de plus un analogue pour les string-links des homomorphismes de Birman-Craggs  $\beta$ , en termes d'invariants de Milnor, Sato-Levine, Arf et Rochlin. Cette correspondance, étudiée dans §4.4, s'énonce par le théorème suivant.

**Théorème 2.16.** *Il existe une bijection entre les ensembles  $\mathcal{HC}(\Sigma_{g,1})$  et  $\mathcal{SL}_1^{hb}(2g)$  qui produit (bien que n'étant pas un homomorphisme de monoïdes) un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \simeq \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g)$$

*tel que le premier homomorphisme de Johnson  $\eta_1$  et les homomorphismes de Birman-Craggs  $\beta$  correspondent respectivement aux triples nombres de Milnor  $\mu_3$  et à l'homomorphisme  $\tau$  du théorème 2.15.*

On déduit par ailleurs du théorème 2.15 le corollaire suivant, caractérisant les invariants de type fini (au sens Goussarov-Habiro) de degré 1 pour les string-links framés des boules d'homologie.

**Corollaire 2.17.** *Soient  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  deux string-links framés dans des boules d'homologie dont les framings et les nombres d'enlacement sont tous nuls (i.e. des string-links appartenant à  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ ). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  sont  $Y_2$ -équivalents,
- (2)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  ne sont pas distingués par les invariants de Goussarov-Habiro de degré 1,
- (3)  $(M, \sigma)$  et  $(M', \sigma')$  ne sont distingués ni par les triples nombres de Milnor, ni par l'invariant de Sato-Levine modulo 2, ni par l'invariant de Arf et le  $\mu$ -invariant de Rochlin.

### 2.2.3 $C_k$ -équivalence pour les string-links

Nous nous consacrons à présent au cas (C) des string-links classiques, c'est-à-dire les string-links (non framés) dans  $D^2 \times I$ .

Soit  $\mathcal{SL}_k(n)$  le sous-monoïde des (classes d'isotopie par rapport aux extrémités des) string-links  $C_k$ -équivalents à  $1_n$ .<sup>10</sup> Notons que, puisque par définition un  $C_1$ -mouvement est juste un changement de croisement (Ex. 1.19 ; Fig. 8), on a  $\mathcal{SL}_1(n) = \mathcal{SL}(n)$ . On a donc une filtration descendante de monoïdes

$$\mathcal{SL}(n) = \mathcal{SL}_1(n) \supset \mathcal{SL}_2(n) \supset \dots$$

Il est montré dans [H] que, pour tout  $l > k \geq 1$ ,  $\mathcal{SL}_k(n)/C_l$  est un groupe. Plus précisément il est démontré que

$$\overline{\mathcal{SL}}_k(n) := \mathcal{SL}_k(n)/C_{k+1}$$

est un groupe abélien (cela se montre comme la proposition 2.4).

Le premier de ces groupes abéliens est facilement identifiable : le théorème suivant montre qu'il est isomorphe à un espace de diagrammes constitués d'un unique côté (des *segments*) dont les extrémités sont coloriées par l'ensemble à  $n$  éléments  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Par la suite, on désignera cet ensemble par  $(n)$ .

**Théorème 2.18.** *Il existe un espace de diagrammes du type segments,  $A_1(n)$ , et une application de chirurgie  $\varphi_1 : A_1(n) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  tels que  $\varphi_1$  est un isomorphisme de groupes abéliens, d'inverse donné par les invariants de Milnor de longueur 2.*

Ce résultat (prouvé dans §5.2) caractérise la  $C_2$ -équivalence pour les string-links à  $n$  cordes : deux tels string-links sont  $C_2$ -équivalents si et seulement s'ils ont les mêmes nombres d'enlacement (qui sont des invariants de Vassiliev de degré 1). Comme corollaire, en considérant la fermeture des string-links et en se basant sur la remarque 1.20, on retrouve le théorème principal de [MN] :<sup>11</sup>

**Corollaire 2.19.** *[MN, Thm. 1.1]*

*Deux entrelacs orientés et ordonnés  $L = K_1 \cup \dots \cup K_m$  et  $L' = K'_1 \cup \dots \cup K'_n$  sont entrelacs-homologues (i.e.  $m = n$  et  $lk(K_i, K_j) = lk(K'_i, K'_j)$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq n$ ) si et seulement si  $K'$  peut être obtenu de  $K$  par une suite finie de  $\Delta$ -mouvements.*

Rappelons de [H, §5.4] l'injection ( $k \geq 1$ )

$$i_k : \mathcal{P}(n)_k / \mathcal{P}(n)_{k+1} \rightarrow \overline{\mathcal{SL}}_k(n),$$

<sup>10</sup>Notons bien que la notation  $\mathcal{SL}_k(n)$  fait intervenir la  $C$ -filtration sur les string-links, et est à bien distinguer de la notation  $\mathcal{SL}_k^{hb}(n)$  concernant la  $Y$ -filtration sur les string-links framés des boules d'homologie.

<sup>11</sup>Bien qu'utilisant la théorie des clasps, notre preuve semble plus simple que celle de [MN] : les calculs présentés dans §5.2 sont en effet très élémentaires.

où  $\mathcal{P}(n)$  désigne le groupe des tresses pures à  $n$  cordes, et  $\mathcal{P}(n)_k$  le  $k^{ieme}$  terme de sa série centrale descendante.  $i_k$  n'est en général pas surjective. Le lemme suivant (prouvé dans §5.2) affirme cependant que, pour  $k = 1$ ,  $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  coïncide avec l'abélianisé du groupe des tresses pures à  $n$  cordes.

**Lemme 2.20.**  $i_2 : \mathcal{P}(n)/\mathcal{P}(n)_2 \rightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  est un isomorphisme.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section, caractérisant la  $C_3$ -équivalence pour les string-links. On va pour cela introduire dans §5.3.1 un espace  $A_2(n)$  engendré par les diagrammes en forme de Y dont les sommets sont coloriés par  $(n)$  et munis d'un ordre partiel, sujets à certaines relations d'antisymétrie. Cet espace de diagrammes constitue une borne supérieure pour le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$ , au sens où on a une application de chirurgie surjective

$$A_2(n) \xrightarrow{\varphi_2} \overline{\mathcal{SL}}_2(n),$$

définie dans §5.3.1. De plus, on définira dans §5.3.2 un isomorphisme de groupes abéliens

$$A_2(n) \xrightarrow{\eta} \Lambda^3 H \oplus S^2 H,$$

où  $S^2 H$  désigne la partie en degré 2 de l'algèbre symétrique sur le  $\mathbf{Z}$ -module  $H$ .<sup>12</sup> On note à nouveau  $\mu_3$  l'ensemble des triples nombres de Milnor, et  $c_2$  l'invariant de Casson des nœuds (dont on donnera dans §5.1 une version string-links). Soit enfin

$$S\mathcal{L}(2) \xrightarrow{V_2} \mathbf{Z}$$

un certain invariant de Vassiliev de degré 2 des string-links à deux composantes, construit explicitement dans §5.1 en termes de diagrammes de cordes et système de poids. Ces divers invariants fournissent un homomorphisme de groupes abéliens  $(\mu_3, V_2, c_2) : \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \rightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H$ , qui permet d'établir le théorème suivant (démontré dans §5.3.2).

**Théorème 2.21.** *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} A_2(n) & \xrightarrow{\varphi_2} & \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \\ & \searrow \eta & \downarrow (\mu_3, V_2, c_2) \\ & & \Lambda^3 H \oplus S^2 H \end{array}$$

*toutes les applications étant des isomorphismes.*

On obtient immédiatement le corollaire suivant (du fait que  $\mu_3$ ,  $V_2$  et  $c_2$  sont des invariants de Vassiliev de degré 2 et les théorèmes 1.27 et 2.21) :

<sup>12</sup>Rappelons que l'algèbre symétrique  $S(H)$  est définie comme le quotient  $T(H)/\mathcal{I}$ , où  $\mathcal{I}$  est l'idéal de l'algèbre tensorielle  $T(H)$  engendré par les éléments de la forme  $x \otimes y - y \otimes x$ ;  $x, y \in H$ .

**Corollaire 2.22.** *Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux string-links à  $n$  cordes dans  $D^2 \times I$ , de nombres d'enlacement nuls. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$\sigma$  et  $\sigma'$  sont  $C_3$ -équivalents ;*
- (2) *Les invariants de Vassiliev de degré 2 ne distinguent pas  $\sigma$  et  $\sigma'$  ;*
- (3)  *$\sigma$  et  $\sigma'$  ne sont distingués ni par les triples nombres de Milnor, ni par l'invariant  $V_2$ , ni par l'invariant de Casson des nœuds.*

Ce résultat apporte, dans le cas  $k = 2$ , une réponse affirmative à la conjecture 6.13 de K. Habiro, rappelée dans la remarque 1.28 (le cas  $k = 2$  étant résolu par le théorème 2.18).

Le théorème 2.21 est à comparer avec le théorème 2.15 de caractérisation de la  $Y_2$ -équivalence sur les string-links framés des boules d'homologie. En particulier, ces objets présentent une partie commune, détectée par les triples nombres de Milnor : ce lien entre  $C$ -filtration et  $Y$ -filtration pour les string-links est étudié dans §5.4. On montre en particulier le résultat suivant

**Théorème 2.23.** *Le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  s'envoie surjectivement sur le sous-groupe  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \subset \overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  des string-links dans des boules d'homologie d'invariant de Rochlin nul. De plus, les réductions modulo 2 des invariants  $V_2$  et de Sato-Levine coïncident via cette surjection.*

## 2.3 $Y$ -équivalence pour les cylindres d'homologie et les string-links

Nous démontrons ici les propositions 2.14 et 2.3 de caractérisation de la  $Y$ -équivalence pour les cylindres d'homologie et les string-links.

### 2.3.1 Démonstration de la proposition 2.14

Soit  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)$  tel que  $(M, \sigma) \sim_{Y_1} (1_{D^2}, 1_n)$  :  $(M, \sigma)$  est obtenu de  $(1_{D^2}, 1_n)$  par chirurgie sur un  $Y$ -graphe  $G$  (que l'on peut supposer connexe). On rappelle que  $M^\sigma$  désigne le complémentaire  $M \setminus \sigma$ . On a alors

$$M^\sigma \cong (1_{D^2} \setminus 1_n) \setminus \text{int}(N(G)) \cup_{j|_{\partial \circ h}} (H_3),$$

où  $j : H_3 \hookrightarrow 1_{D^2} \setminus 1_n$  est un plongement orienté du corps en anses de genre 3 sur un voisinage régulier  $N(G)$  de  $G$ , et où  $h$  est un certain élément du Torelli de  $\Sigma_3 = \partial H_3$ .<sup>13</sup>  $h$  induit l'identité au niveau de  $\pi_1(\Sigma_3)/\pi_1(\Sigma_3)_2$  : on a donc (par un argument du type Van Kampen) un isomorphisme

$$\frac{\pi_1(1_{D^2} \setminus 1_n)}{(\pi_1(1_{D^2} \setminus 1_n))_2} \xrightarrow{\simeq} \frac{\pi_1(M^\sigma)}{(\pi_1(M^\sigma))_2},$$

qui est compatible avec les applications  $i_\varepsilon$  ;  $\varepsilon = 0, 1$ . Ceci montre l'inclusion  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n) \subset \mathcal{SL}^{hb}(n)[2]$ .

---

<sup>13</sup>Voir [Ma, Lem. 1] pour une description explicite du difféomorphisme  $h$ .

Pour montrer l'autre inclusion, commençons par remarquer que toute boule d'homologie est  $Y$ -équivalente à  $B^3 \cong D^2 \times I$  : par [Mt, Thm. A],<sup>14</sup> toute boule d'homologie est en effet obtenue de  $B^3$  par chirurgie le long d'un *entrelacs bord* (i.e. un entrelacs dont les composantes bordent des surfaces de Seifert deux à deux disjointes)  $(\pm 1)$ -framé ; or on rappelle le résultat suivant (voir par exemple [Ha1, Cor. 6.2])

**Lemme 2.24.** *Un mouvement de chirurgie sur un entrelacs bord  $(\pm 1)$ -framé peut être réalisé par une suite de  $Y$ -chirurgies.*

Il suffit donc de prouver qu'un string-link  $\sigma$  dans  $D^2 \times I$  dont tous les framings et nombres d'enlacement sont nuls est  $Y$ -équivalent au string-link trivial. En faisant une série de sommes connexes de  $\sigma$  avec des copies de l'entrelacs borroméen, on peut de plus supposer que ses triples nombres de Milnor sont nuls. Or, on sait par l'exemple 1.19 que de telles sommes connexes sont réalisées par chirurgie le long d'un  $Y$ -graphe dont chaque feuille est un méridien d'une composante de  $\sigma$ . Par [Lev2, Thm. D] (voir aussi [Ha2, Cor. 1.2 (ii)]),  $\sigma$  est alors *chirurgie-équivalent* au string-link trivial :  $\sigma$  est obtenu de  $1_n$  par une suite de chirurgies le long de nœuds triviaux  $(\pm 1)$ -framés du complémentaire de  $\sigma$ , d'enlacement nul avec les cordes de  $\sigma$ . Un tel nœud  $K$  borde une surface de Seifert dans le complémentaire de  $\sigma$ , et par le lemme 2.24, la chirurgie sur  $K$  est réalisée par une suite de  $Y$ -chirurgies. L'inclusion  $\mathcal{SL}^{hb}(n)[2] \subset \mathcal{SL}_1^{hb}(n)$  est donc prouvée.

**Remarque 2.25.** Dans le cas où le nombre de cordes  $n$  est *pair*, la proposition 2.14 peut être démontrée directement à partir de la proposition 2.3 (prouvée ci-dessous) et [Ha1, Thm.2.1]. En effet, ce théorème de N. Habegger établit une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})[1]$  des cylindres d'homologie sur  $\Sigma_{g,1}$ , et  $\mathcal{SL}^{hb}(2g)[2]$ , le monoïde des string-links framés à  $2g$  cordes dans des boules d'homologie dont la deuxième représentation d'Artin est triviale. Cette bijection, donnée explicitement dans §4.4, envoie un élément  $M$  obtenu de  $\Sigma_{g,1} \times I$  par chirurgie le long d'un clasper acceptable  $G$  sur un string-link obtenu de  $(D^2 \times I, 1_{2g})$  par chirurgie sur un clasper  $G'$  (construit à partir de  $G$  : voir §4.4). Mais par la proposition 2.3, tout élément de  $\mathcal{C}(\Sigma_{g,1})[1]$  est  $Y$ -équivalent à  $\Sigma_{g,1} \times I$  : on a donc  $\mathcal{SL}^{hb}(2g)[2] \subset \mathcal{SL}_1^{hb}(2g)$ .

### 2.3.2 Démonstration de la proposition 2.3

**Rappel de résultats de N. Habegger.** Pour démontrer cette proposition 2.3, nous utilisons un résultat de N. Habegger [Ha1]. Pour cela, on a besoin de la définition suivante. Soit  $k \geq 0$  un entier, un *corps en anses d'homologie* de genre  $k$  est une paire  $(M, i)$  où

- (i)  $M$  est une 3-variété (compacte orientée) dont les groupes d'homologie entière sont isomorphes à ceux de  $H_k$ , le corps en anses standard de genre  $k$  ;

---

<sup>14</sup>Dans [Mt], le théorème est énoncé pour les sphères d'homologie.

(ii)  $i : \Sigma_k = \partial H_k \longrightarrow M$  est un plongement orienté d'image  $\partial M$ .

On a alors le résultat suivant, caractérisant la  $Y$ -équivalence pour ces objets.

**Proposition 2.26.** [Ha1, Prop 2.5+Rem 2.6]

Soient  $(M_1, i_1)$  et  $(M_2, i_2)$  deux corps en anses d'homologie de genre  $k$ . Alors,

$$\text{Ker} \left( H_1(\Sigma_k; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_{1,*}} H_1(M_1; \mathbf{Z}) \right) = \text{Ker} \left( H_1(\Sigma_k; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_{2,*}} H_1(M_2; \mathbf{Z}) \right)$$

si et seulement si  $(M_1, i_1)$  et  $(M_2, i_2)$  sont  $Y$ -équivalents.

**Preuve de 2.3(1).** Puisque la chirurgie le long de clasps préserve l'homologie, l'inclusion  $\mathcal{C}_1(\Sigma) \subset \mathcal{HC}(\Sigma)$  est claire.

On prouve l'autre inclusion en distinguant le cas  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  d'une surface de genre  $g \geq 0$  à 1 composante de bord du cas  $\Sigma = \Sigma_g$  d'une surface close de genre  $g \geq 0$ .

On prouve l'inclusion  $\mathcal{HC}(\Sigma_{g,1}) \subset \mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1})$  en utilisant le résultat de N. Habegger rappelé dans le paragraphe précédent. On note  $(H_k, j)$  le corps en anses standard de genre  $k$  avec l'inclusion  $j : \Sigma_k \hookrightarrow H_k$ . On note aussi  $\mathcal{B}$  la base de  $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$  induite par les courbes  $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$  sur  $\Sigma_{g,1}$ , et  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$  la décomposition en anses de  $\Sigma_{g,1}$  associée à ces courbes (voir Fig. 17 ci-dessous).

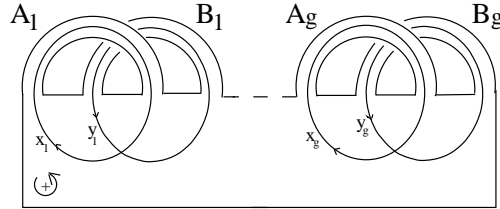


FIG. 17 – Les courbes  $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$  sur la surface  $\Sigma_{g,1}$  décomposée en anses  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ .

On identifie  $\Sigma_{g,1} \times I$  avec  $\Sigma_{0,2g+1} \times I \cong H_{2g}$ , via le difféomorphisme  $\Sigma_{g,1} \times I \cong \Sigma_{0,2g+1} \times I$  réalisé par les  $g$  isotopies échangeant la seconde zone d'attachement de la anse  $A_i \times I$  et la première zone d'attachement de la anse  $B_i \times I$ . Soit  $f$  le difféomorphisme induit entre  $\partial(\Sigma_{g,1} \times I)$  et  $\Sigma_{2g} = \partial H_{2g}$ . Tout cobordisme d'homologie  $M = (M, i^+, i^-)$  sur  $\Sigma_{g,1}$  produit donc un corps en anses d'homologie de genre  $2g$   $(M, i)$ , en définissant  $i : \Sigma_{2g} \longrightarrow M$  comme étant le difféomorphisme obtenu en recollant  $i^+$  avec  $i^-$  via  $f$ . Supposons maintenant que  $M$  est un cylindre d'homologie. Prouver que le corps en anses d'homologie  $(M, i)$  est  $Y$ -équivalent à  $(H_{2g}, j)$  impliquera que le cylindre d'homologie  $M$  est  $Y$ -équivalent à  $(\Sigma_{g,1} \times I, Id_0, Id_1)$ .

Pour cela, soient  $x_1^*, \dots, x_g^*, y_1^*, \dots, y_g^*$  des arcs propres disjoints de  $\Sigma_{g,1}$ , qui

sont “duaux” aux courbes  $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g$  au sens où  $x_k^*$  (resp.  $y_k^*$ ) intersecte transversalement  $x_k$  (resp.  $y_k$ ) une fois, mais n’intersecte pas les autres courbes. Par exemple, on choisit les premières zones d’attachement de chaque 1-anse  $A_i$  et  $B_i$ . Pour chaque  $k$ ,  $X_k = x_k^* \times I$  et  $Y_k = y_k^* \times I$  sont des disques dans  $\Sigma_{g,1} \times I$  : le noyau de  $j_* : H_1(\Sigma_{2g}) \longrightarrow H_1(\Sigma_{g,1} \times I)$  est engendré par  $\partial X_1, \dots, \partial X_g, \partial Y_1, \dots, \partial Y_g$ . D’autre part, on observe que  $\pm \partial Y_k$  (resp.  $\pm \partial X_k$ ) est homologue à  $x_k \times 0 - x_k \times 1$  (resp. à  $y_k \times 0 - y_k \times 1$ ) dans  $\Sigma_{2g}$ . Puisque  $M$  est un cylindre d’homologie,  $i(\partial X_k)$  et  $i(\partial Y_k)$  sont donc nul-homologues dans  $M$ . Comme le noyau de  $i_* : H_1(\Sigma_{2g}) \longrightarrow H_1(M)$  doit être de rang  $2g$ , il est engendré par  $\partial X_1, \dots, \partial X_g, \partial Y_1, \dots, \partial Y_g$ . Il suit du théorème 2.26 que  $(M, i)$  est  $Y$ -équivalent à  $(H_{2g}, j)$ , ce qui prouve l’inclusion  $\mathcal{HC}(\Sigma_{g,1}) \subset \mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1})$ .

On justifie maintenant l’inclusion  $\mathcal{HC}(\Sigma_g) \subset \mathcal{C}_1(\Sigma_g)$ . Soit  $j : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_g$  un plongement et soit  $D \subset \Sigma_g$  son disque complémentaire. On prend un cobordisme d’homologie  $M = (M, i^+, i^-)$  sur  $\Sigma_{g,1}$ . Alors, le plongement  $(i^+)|_{\partial} \circ (j|_{\partial})^{-1} = (i^-)|_{\partial} \circ (j|_{\partial})^{-1} : \partial D \hookrightarrow \partial M$  peut être étiré en un plongement  $\partial D \times I \hookrightarrow \partial M$ . Ce dernier nous permet d’attacher une 2-anse  $D \times I$  à  $M$ . Ceci nous donne un cylindre d’homologie sur  $\Sigma_g$ . On a donc défini une application de *rebouchage*

$$\mathcal{C}(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{j} \mathcal{C}(\Sigma_g).$$

On vérifie facilement que  $j$  est surjective. Soit  $M \in \mathcal{HC}(\Sigma_g)$ , on choisit un  $N \in \mathcal{C}(\Sigma_{g,1})$  tel que  $M$  est le rebouchage de  $N$ . Alors,  $N$  est un cylindre d’homologie et est donc  $Y$ -équivalent à  $1_{\Sigma_{g,1}}$ . On conclut que  $M \in \mathcal{C}_1(\Sigma_g)$ , ce qui complète la preuve du point (1) de la proposition 2.3.

**Preuve de 2.3(2).** Ce second point repose essentiellement sur la remarque 2.13, qui met en évidence la relation entre les string-links dans des boules d’homologie avec les cobordismes d’homologie sur un disque à trous. À tout cobordisme d’homologie  $(M, i^+, i^-)$  sur le disque à  $n$  trous, on associe en effet un élément  $(B, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)$  en attachant  $n$  2-anses le long du bord de  $M$ , les  $n$  cordes de  $\sigma$  étant données par les âmes de ces 2-anses. Pour tout  $k$ , l’automorphisme de  $F/F_{k+1}$  induit par  $(M, i^+, i^-)$  coïncide alors avec  $\mathcal{A}_k(\sigma)$ , la  $k^{ieme}$  représentation d’Artin de  $\sigma$ . Or on a noté que tout élément de  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$  vérifie  $\mathcal{A}_1(\sigma) = 1$  : tout cobordisme d’homologie sur le disque à  $n$  trous induit donc l’identité en homologie. On a donc bien  $\mathcal{HC}(\Sigma) = \mathcal{C}(\Sigma)$ .

On peut de plus remarquer que  $M$  est  $Y$ -équivalent à  $D_n^2 \times I$  si et seulement si  $(B, \sigma)$  est  $Y$ -équivalent à  $(D^2 \times I, 1_n)$ , ce qui est équivalent par la proposition 2.14 à dire que  $(B, \sigma) \in \mathcal{SL}^{hb}(n)[2] : \mathcal{A}_2(\sigma) = 1$ . Par la remarque 2.13, on a donc bien :  $M$  est  $Y$ -équivalent à  $D_n^2 \times I$  si et seulement s’il induit l’identité sur  $F/F_3$ , c’est-à-dire s’il appartient à  $\mathcal{C}(D_n^2)[2]$ .





relatives de  $G_1$  et  $G_2$  : là encore, c'est possible au prix de changements de croisements sur ces claspers de  $Y$ -degré  $k$ , ne modifiant pas la classe de  $Y_{k+1}$ -équivalence de  $M_1 \cdot M_2$ . Ainsi,  $M_1 \cdot M_2 \sim_{Y_{k+1}} M_2 \cdot M_1 : \overline{C}_k(\Sigma)$  est un groupe abélien.

**Remarque 2.27.** Il convient de revenir sur un fait intervenant dans cette démonstration, et qui nous sera d'une certaine utilité par la suite :

Soit  $G$  un clasper acceptable de  $Y$ -degré  $k$  pour un entrelacs  $\gamma$  dans une 3-variété  $M$ . Soit  $G_s$  un clasper obtenu de  $G$  en effectuant un demi-twist positif sur un côté. Alors

$$(M, \gamma)_{G \cup G_s} \sim_{Y_{k+1}} (M, \gamma).$$

On a un résultat similaire pour les claspers stricts.

### 3 Y-filtration pour les cylindres d'homologie

#### 3.1 Application de chirurgie pour $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$

Dans cette section, on définit l'espace de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P)$ , l'isomorphisme de groupes abéliens  $\rho$  et l'application de chirurgie  $\psi$  annoncés dans §2.1.

##### 3.1.1 Groupes abéliens spéciaux et le foncteur $\mathcal{A}_1$

On note  $\mathcal{A}b$  la catégorie des groupes abéliens. Un *groupe abélien avec élément spécial* est une paire  $(G, s)$  où  $G$  est un groupe abélien et  $s \in G$  est d'ordre au plus 2. On note  $\mathcal{A}b_s$  la catégorie des groupes abéliens spéciaux, dont les morphismes sont des homomorphismes de groupes préservant l'élément spécial. On définit maintenant un foncteur

$$\mathcal{A}b_s \xrightarrow{\mathcal{A}_1} \mathcal{A}b$$

de la façon suivante. Pour un objet  $(G, s)$  de  $\mathcal{A}b_s$ ,  $\mathcal{A}_1(G, s)$  est le groupe abélien libre engendré par les diagrammes unitrivalents en forme de Y, dont le sommet trivalent est équipé d'un ordre cyclique sur les côtés incidents et dont les sommets univalents sont coloriés par  $G$ , sujets à certaines relations. La notation

$$Y[z_1, z_2, z_3]$$

désignera le graphe en forme de Y dont les sommets univalents sont coloriés par  $z_1, z_2$  and  $z_3 \in G$  conformément à l'ordre cyclique, si bien que notre notation est invariante sous permutation cyclique des  $z_i$ . Les relations sont les suivantes :

$$\textbf{Multilinéarité} \quad : \quad Y[z_0 + z_1, z_2, z_3] = Y[z_0, z_2, z_3] + Y[z_1, z_2, z_3],$$

$$\textbf{Glissement} \quad : \quad Y[z_1, z_1, z_2] = Y[s, z_1, z_2],$$

où  $z_0, z_1, z_2, z_3 \in G$ . Remarquons que ces deux relations impliquent la relation d'antisymétrie (AS)

$$Y[z_1, z_2, z_3] = -Y[z_2, z_1, z_3].$$

Pour  $(G, s) \xrightarrow{f} (G', s')$  un morphisme de  $\mathcal{A}b_s$ ,  $\mathcal{A}_1(f)$  envoie chaque générateur  $Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(G, s)$  sur  $Y[f(z_1), f(z_2), f(z_3)] \in \mathcal{A}_1(G', s')$ .

**Exemple 3.1.** L'application  $[G \longmapsto (G, 0)]$  fait de  $\mathcal{A}b$  une sous-catégorie (complète) de  $\mathcal{A}b_s$ . Il suit des définitions que le diagramme suivant est com-

mutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}b & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}b_s \\
 & \searrow \Lambda^3(-) & \downarrow \mathcal{A}_1 \\
 & & \mathcal{A}b.
 \end{array}$$

Des exemples non triviaux seront donnés dans le paragraphe suivant. Pour des usages futurs, notons que cette catégorie a une construction de pullback évidente qui étend celle de  $\mathcal{A}b$  :

$$\begin{array}{ccc}
 (G_1, s_1) \times_{(G, s)} (G_2, s_2) & \longrightarrow & (G_2, s_2) \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_2 \\
 (G_1, s_1) & \xrightarrow{f_1} & (G, s)
 \end{array}$$

où  $(G_1, s_1) \times_{(G, s)} (G_2, s_2)$  est le sous-groupe de  $G_1 \times G_2$  des  $(z_1, z_2)$  tels que  $f_1(z_1) = f_2(z_2)$ , avec élément spécial  $(s_1, s_2)$ .

### 3.1.2 Structures spin et le groupe abélien spécial $P$

Dans ce paragraphe, soit  $M$  une 3-variété compacte orientée munie d'une structure Riemannienne, et soit  $FM$  son fibré des repères orthonormés orientés :

$$SO(3) \xrightarrow{i} FM \xrightarrow{p} M.$$

Soit  $s \in H_1(FM; \mathbf{Z})$  l'image par  $i_*$  du générateur de  $H_1(SO(3); \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$ . Rappelons que  $M$  est spinnable et que  $Spin(M)$  peut être défini comme

$$Spin(M) = \left\{ y \in H^1(FM; \mathbf{Z}_2), \langle y, s \rangle \neq 0 \right\},$$

qui est essentiellement indépendant de la métrique. La variété  $M$  étant spinnable,  $s$  n'est pas nul (et est donc d'ordre 2).

Formons le diagramme commutatif de groupes abéliens spéciaux

$$\begin{array}{ccc}
 (H_1(FM; \mathbf{Z}), s) & \xrightarrow{T} & (H_1(FM; \mathbf{Z}_2), s) \\
 \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\
 (H_1(M; \mathbf{Z}), 0) & \xrightarrow{T} & (H_1(M; \mathbf{Z}_2), 0),
 \end{array}$$

où  $T$  désigne la tensorisation par  $\mathbf{Z}_2$ . C'est un diagramme de pullback : le diagramme étant commutatif, on a par fonctorialité une application

$$(H_1(FM; \mathbf{Z}), s) \xrightarrow{(p_*, T)} (H_1(M; \mathbf{Z}), 0) \times_{(H_1(M; \mathbf{Z}_2), 0)} (H_1(FM; \mathbf{Z}_2), s).$$

La suite de Serre associée au fibré  $FM$  donne pour l'homologie à coefficients entiers :

$$0 \longrightarrow H_1(SO(3); \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(FM; \mathbf{Z}) \xrightarrow{p_*} H_1(M; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0, \quad (5)$$

et on a de même une suite exacte courte pour l'homologie réduite modulo 2. La bijectivité de  $(p_*, T)$  suit de l'exactitude de ces suites.

D'autre part,  $Spin(M)$  est un espace affine sur  $H^1(M; \mathbf{Z}_2)$ , d'action donnée par

$$\forall x \in H^1(M; \mathbf{Z}_2), \forall \sigma \in Spin(M), \quad x \cdot \sigma := \sigma + p^*(x),$$

et on peut donc considérer l'espace

$$A(Spin(M), \mathbf{Z}_2)$$

des fonctions affines sur  $Spin(M)$  à valeurs dans  $\mathbf{Z}_2$ . Par exemple,  $\bar{1} \in A(Spin(M), \mathbf{Z}_2)$  désigne l'application constante définie par  $\sigma \mapsto 1$ .

**Lemme 3.2.** *On a un isomorphisme de groupe abéliens spéciaux*

$$(H_1(FM; \mathbf{Z}_2), s) \simeq (A(Spin(M), \mathbf{Z}_2), \bar{1}).$$

*Démonstration.* On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A(Spin(M), \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{V} Hom(H^1(M; \mathbf{Z}_2), \mathbf{Z}_2) \longrightarrow 0, \quad (6)$$

où  $V$  est l'application qui à toute application affine  $f$  sur  $Spin(M)$  associe l'unique application linéaire  $\vec{f}$  associée, et où  $K$  désigne le noyau de  $V$  : on a  $K \simeq \mathbf{Z}_2$ , engendré par l'application  $\bar{1}$ . On considère l'application canonique, appelée *évaluation*,

$$H_1(FM; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{e} A(Spin(M), \mathbf{Z}_2)$$

envoyant  $x$  sur l'application  $e_x$  définie par  $\sigma \mapsto \langle \sigma, x \rangle$ . Comme précédemment, on a une suite exacte courte induite par la suite de Serre associée au fibré  $FM$  pour l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}_2$ , et telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(SO(3); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{i_*} & H_1(FM; \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_1(M; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow e & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A(Spin(M), \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{V} & Hom(H^1(M; \mathbf{Z}_2), \mathbf{Z}_2) \longrightarrow 0. \end{array}$$

En effet, il suit de la définition de  $Spin(M)$  que  $i_*(1)$  est envoyé par  $e$  sur l'application  $\bar{1}$ . De plus, pour tout  $x \in H_1(FM; \mathbf{Z}_2)$ , l'application  $e_x$  vérifie

$$e_x(c \cdot \sigma) = e_x(\sigma + p^*(c)) = \langle \sigma, x \rangle + \langle p^*(c), x \rangle = e_x(\sigma) + \langle c, p_*x \rangle,$$

$\forall c \in H^1(M; \mathbf{Z}_2), \forall \sigma \in Spin(M)$  : l'application linéaire associée à  $e_x$  est donc bien l'évaluation sur  $p_*x$ .  $\square$

Soit l'application canonique

$$A(Spin(M), \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\kappa} H_1(M; \mathbf{Z}_2)$$

qui à  $f \in A(Spin(M), \mathbf{Z}_2)$  associe la classe d'homologie  $\kappa(f)$ , donnée explicitement par

$$\forall \sigma, \sigma' \in Spin(M), \quad f(\sigma') - f(\sigma) = \langle \sigma'/\sigma, \kappa(f) \rangle \in \mathbf{Z}_2,$$

où  $\sigma'/\sigma \in H^1(M; \mathbf{Z}_2)$  est donné par l'action affine sur  $Spin(M)$  : c'est l'unique  $\alpha \in H^1(M; \mathbf{Z}_2)$  tel que  $p^*(\alpha) \cdot \sigma = \sigma'$ . En d'autres termes,  $\kappa$  consiste essentiellement à *prendre l'application linéaire associée*, comme dans la preuve du lemme 3.2.

Le lemme suivant donne une bonne compréhension du groupe abélien spécial  $(H_1(FM; \mathbf{Z}), s)$ .

**Lemme 3.3.** [MM, Lemme 2.7]

a) Le diagramme de groupes abéliens spéciaux suivant est un diagramme de pullback :

$$\begin{array}{ccc} (H_1(FM; \mathbf{Z}), s) & \xrightarrow{e} & (A(Spin(M), \mathbf{Z}_2), \bar{1}) \\ \downarrow p_* & \lrcorner & \downarrow \kappa \\ (H_1(M; \mathbf{Z}), 0) & \xrightarrow{- \otimes \mathbf{Z}_2} & (H_1(M; \mathbf{Z}_2), 0). \end{array}$$

b) Soit  $t$  l'application

$$\{\text{Nœuds framés orientés de } M\} \xrightarrow{t} H_1(FM; \mathbf{Z})$$

qui à un nœud framé orienté  $K$  ajoute un  $(+1)$ -twist supplémentaire, puis l'envoie sur la classe d'homologie de son relevé dans  $FM$ . Alors,

- (i)  $t$  est surjective ;
- (ii)  $t_{K_1} = t_{K_2}$  si et seulement s'il existe une surface de bord  $(K_1) \cup (-K_2)$  dans  $M$  telle que les framings  $K_1$  et  $K_2$  par rapport à cette surface diffèrent d'un nombre pair ;

(iii) si  $K_1 \#_b K_2$  désigne une somme connexe de  $K_1$  et  $K_2$  le long d'une bande  $b$  de  $M$ , alors  $t_{K_1 \#_b K_2} = t_{K_1} + t_{K_2}$  ;

(iv) le nœud trivial orienté  $k$ -framé ( $k \in \mathbf{Z}$ ) est envoyé par  $t$  sur  $k \cdot s$ .

*Démonstration.* Le point a) est clair d'après le lemme 3.2. Prouvons donc b), à commencer par l'assertion (iv). Soit  $K$  un nœud orienté trivial  $k$ -framé, et  $*$   $\in K$ . Soit  $e = (e_1, e_2, e_3) \in p^{-1}(*)$  le framing de  $K$  en  $*$ . On note  $\tilde{K}$  le relevé de  $K$  dans  $FM$ . Vu comme un lacet de  $FM$ ,  $\tilde{K}$  est homotope au lacet de la fibre  $p^{-1}(*)$  défini par

$$[0, 1] \ni t \longmapsto R_{2\pi(k+1)t}(e),$$

où  $R_\theta$  désigne la rotation d'axe dirigé par  $e_3$  et d'angle  $\theta$  ( $\theta \in \mathbf{R}$ ). D'une bonne description du générateur de  $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbf{Z}_2$  (voir par exemple [B, §III.10]), il suit que  $[\tilde{K}] = (k+1) \cdot s \in H_1(FM; \mathbf{Z})$ , et donc l'assertion (iv).

On fait à présent une observation. Soit  $K$  un nœud framé orienté de  $M$  ; comme le framing de  $K$  détermine une trivialisation de son fibré normal dans  $M$ , on peut restreindre toute structure spin sur  $M$  à  $K$ . Rappelons maintenant que le groupe de cobordisme  $\Omega_1^{Spin}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}_2$  (de générateur donné par  $\mathbf{S}^1$  avec la structure spin induite par sa structure de groupe de Lie : voir [Ki, p. 35, 36]). L'observation suivante a alors du sens :

$$\forall \sigma \in Spin(M), \quad e(t_K)(\sigma) = (K, \sigma|_K) \in \Omega_1^{Spin} \simeq \mathbf{Z}_2, \quad (7)$$

et peut être déduite d'une description appropriée des structures spin du cercle (voir [Ki, p. 35, 36]).

Soient à présent  $K_1$  et  $K_2$  deux nœuds framés orientés disjoints de  $M$ . Il existe alors une surface de genre  $g$  bordée par  $K_1 \# K_2 \dot{\cup} (-K_1) \dot{\cup} (-K_2)$ . Alors, d'après (7), on a  $e(t_{K_1 \# K_2}) = e(t_{K_1}) + e(t_{K_2})$ . De plus,  $p_*(t_{K_1 \# K_2}) = [K_1 \# K_2] = [K_1] + [K_2] = p_*(t_{K_1}) + p_*(t_{K_2})$ , et par a) on obtient l'assertion (iii).

Justifions maintenant l'assertion (ii). D'après a),  $t_{K_1} = t_{K_2}$  si et seulement si  $p_*(t_{K_1}) = p_*(t_{K_2})$  et  $e(t_{K_1}) = e(t_{K_2})$ . Ainsi, la condition  $p_*(t_{K_1}) = p_*(t_{K_2})$  est remplie si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont homologues dans  $M$ . Dans ce cas, soit  $S$  une surface orientée plongée dans  $M$  telle que  $\partial S = K_1 \dot{\cup} (-K_2)$ . Soit  $k_i$  le framing de  $K_i$  relativement à  $S$  et soit  $K'_i$  le nœud framé orienté obtenu de  $K_i$  en ajoutant un  $(-k_i)$ -twist supplémentaire, de telle sorte que le framing de  $K'_i$  est donné par  $S$ . Alors, d'après (7), on a  $e(t_{K'_1}) = e(t_{K'_2})$ . De plus, en appliquant les assertions (iii) et (iv), on obtient :  $e(t_{K'_i}) = e(t_{K_i}) + k_i \cdot s$ . Nous en concluons que  $e(t_{K_1}) = e(t_{K_2})$  si et seulement si  $k_1$  et  $k_2$  sont égaux modulo 2, prouvant donc l'assertion (ii).

Soit  $x \in H_1(FM; \mathbf{Z})$ , alors  $p_*(x) \in H_1(M; \mathbf{Z})$  peut être réalisé par un nœud orienté  $K$  dans  $M$  : on lui donne un framing arbitraire. Par construction,  $p_*(t_K - x) = 0 \in H_1(M; \mathbf{Z})$ , et d'après l'exactitude de la suite de Serre,

$t_K - x = \varepsilon \cdot s$  avec  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ . En faisant la somme connexe de  $K$  avec un nœud trivial  $(+1)$ -framé lorsque  $\varepsilon = 1$ , et d'après les assertions (iii) et (iv), le nœud framé  $K$  peut être supposé tel que  $t_K = x$ ; ceci prouve l'assertion (i).  $\square$

Restreignons nous à présent au cas de la 3-variété  $M = 1_{\Sigma_{g,n}} = \Sigma_{g,n} \times I$ , où  $\Sigma_{g,n}$  est une surface compacte connexe orientée de genre  $g$  à  $n$  composantes de bord. On note  $H_{g,n} := H_1(\Sigma_{g,n}, \mathbf{Z})$ , et  $(H_{g,n})_{(2)} := H_{g,n} \otimes \mathbf{Z}_2$ . On rappelle de §2.1.2 la  $\mathbf{Z}_2$ -algèbre  $B_{g,n} := B(\Sigma_{g,n})$  des polynômes Booléens sur  $Spin(\Sigma_{g,n})$  : on note  $B_{g,n}^{(k)}$  la partie de degré  $k$  de  $B_{g,n}$ . Rappelons en particulier que  $B_{g,n}^{(1)} = A(Spin(\Sigma_{g,n}), \mathbf{Z}_2)$ .

Ainsi, d'après le lemme 3.3 a),  $(H_1(E(F1_{\Sigma_{g,n}}); \mathbf{Z}), s)$  est canoniquement isomorphe au groupe abélien spécial défini par la construction de pull-back

$$\begin{array}{ccc} (H_{g,n}, 0) \times_{((H_{g,n})_{(2)}, 0)} (B_{g,n}^{(1)}, \bar{1}) & \xrightarrow{e} & (B_{g,n}^{(1)}, \bar{1}) \\ \downarrow p & & \downarrow \kappa \\ (H_{g,n}, 0) & \xrightarrow{- \otimes \mathbf{Z}_2} & ((H_{g,n})_{(2)}, 0) \end{array}$$

dont les projections sont notées  $p$  et  $e$ , et où  $\kappa$  est la composée

$$B_{g,n}^{(1)} \longrightarrow B_{g,n}^{(1)} / B_{g,n}^{(0)} \xrightarrow{\cong} (H_{g,n})_{(2)}.$$

Le dernier isomorphisme identifie  $\bar{h}$  avec  $h_{(2)}$  pour tout  $h \in H_{g,n}$  (ce qui est bien défini par les équations (2) et (3) de la section 2). On définit le groupe abélien spécial  $P_{g,n}$  par

$$P_{g,n} = (H_{g,n}, 0) \times_{((H_{g,n})_{(2)}, 0)} (B_{g,n}^{(1)}, \bar{1}),$$

et son image  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  par le foncteur  $\mathcal{A}_1$  de §3.1.1 est l'espace de diagrammes annoncé dans §2.1.3.

Par la suite, quand  $(g, n)$  seront clairs d'après la contexte, on les oubliera dans la notation.

**Remarque 3.4.** Rappelons que, si  $h$  est représenté par une courbe fermée simple  $c$  de  $\Sigma$  et que  $\tilde{c}$  désigne son relevé dans  $U\Sigma$  obtenu en framant  $c$  par le champ de vecteurs tangent à la courbe,  $\bar{h} \in B^{(1)}$  envoie chaque  $\sigma \in Spin(\Sigma)$  sur  $\langle \sigma, \tilde{h} \rangle$ , où  $\tilde{h} \in H_1(U\Sigma; \mathbf{Z}_2)$  est la classe d'homologie de  $\tilde{c} + z$  (avec  $z$  la classe de la fibre) - voir §2.1.2. Il suit alors de la définition de l'application  $t$  que, si  $K$  est le poussement dans  $\Sigma \times I$  d'une courbe fermée simple orientée

$c_+$  dans  $\Sigma^+$  de classe d'homologie  $h$  framée le long de  $\Sigma^+$  par le champ de vecteurs tangent, alors

$$\bar{h}(\sigma) = e(t_K)(\sigma).$$

Ainsi, tout élément  $z$  de  $P$  peut être écrit comme

$$z = (h, \bar{h} + \varepsilon \cdot \bar{1}) \in P,$$

avec  $h \in H$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  : soit  $K_\varepsilon$  construit comme  $K$  (ci-dessus) avec un  $\varepsilon$ -twist additionnel, alors il suit que

$$t_{K_\varepsilon} = z \in P \simeq H_1(F1_\Sigma; \mathbf{Z}).$$

Ajoutons que, dans cette notation, une famille génératrice pour  $P_{g,n}$  est donnée par  $(0, \bar{1})$  et les  $(e_i, \bar{e}_i)$ , pour toute base  $(e_i)_{i=1, \dots, 2g+n-1}$  de  $H_{g,n}$ .

**Remarque 3.5.** D'après la preuve du lemme 3.3, la suite de Serre en homologie associée au fibré  $F1_\Sigma$  donne la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow P \xrightarrow{p} H \longrightarrow 0,$$

où  $\mathbf{Z}_2$  s'injecte dans  $P$  en envoyant 1 sur  $(0, \bar{1})$ . L'application  $s : H \longrightarrow P$  définie par  $s(h) = (h, \bar{h})$  est une section. D'après (2), le 2-cocycle  $H \times H \longrightarrow \mathbf{Z}_2$  associé est la réduction mod 2 de la forme d'intersection sur  $\Sigma$ . Ainsi,  $P$  est isomorphe à l'extension centrale de  $H$  par  $\mathbf{Z}_2$ , définie par

$$(h_1, \varepsilon_1) \cdot (h_2, \varepsilon_2) = (h_1 + h_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + h_1 \cdot h_2).$$

L'élément  $(h, \bar{h} + \varepsilon \cdot \bar{1}) \in P$  correspond à  $(h, \varepsilon)$  dans cette extension.

### 3.1.3 L'application de chirurgie $\psi$

Pour chaque générateur  $Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P)$ , où  $z_i = (h_i, \varepsilon_i) \in P$ , on choisit des nœuds framés orientés disjoints  $K_i$  dans l'intérieur de  $(\Sigma \times I)$  tels que  $t_{K_i} = z_i \in P$  (c'est toujours possible, puisque  $t$  est surjective). On choisit ensuite un disque  $D$  plongé dans l'intérieur de  $(\Sigma \times I)$ , disjoint des  $K_i$ , que l'on oriente de façon arbitraire, et on le connecte aux  $K_i$  par des bandes  $e_i$  dans  $(\Sigma \times I)$ . On demande que ces bandes soient compatibles avec les orientations des différents constituants, ainsi qu'avec l'ordre cyclique  $(1, 2, 3)$ . Voir Fig. 18 pour un exemple. On obtient ainsi un  $Y$ -graphe acceptable dans  $(\Sigma \times I)$ , noté  $p(Y[z_1, z_2, z_3])$ . On définit  $\psi(Y[z_1, z_2, z_3])$  comme la classe de  $Y_2$ -équivalence du résultat  $(\Sigma \times I)_{p(Y[z_1, z_2, z_3])}$  de la chirurgie le long de  $p(Y[z_1, z_2, z_3])$ .

**Théorème 3.6.** *La classe de  $Y_2$ -équivalence de  $(\Sigma \times I)_{p(Y[z_1, z_2, z_3])}$  est indépendante du choix de  $p$ . On définit ainsi une application surjective :*

$$\mathcal{A}_1(P) \xrightarrow{\psi} \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma).$$



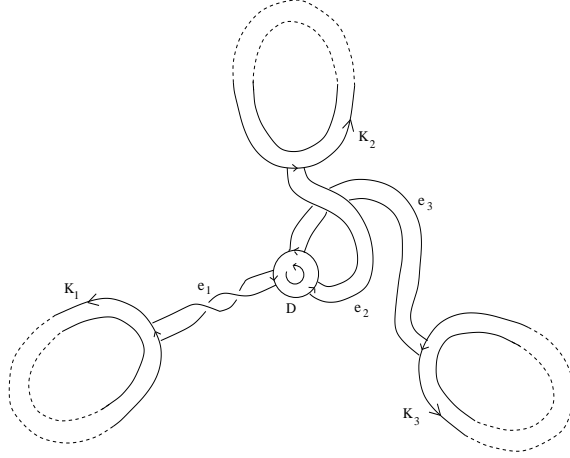


FIG. 18 – Plongement d'un Y-graphe.

*Démonstration.* On commence par montrer que  $\psi(Y[z_1, z_2, z_3])$  ne dépend pas du choix de  $p(Y[z_1, z_2, z_3])$ . Pour cela, on rappelle deux faits pour un Y-graphe  $G$  acceptable pour un cylindre d'homologie  $M$  :

**Fait 1** la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $M_G$  n'est pas modifiée lorsqu'un côté de  $G$  est glissé sur un nœud framé orienté de  $M$  (Lemme 1.37) ;

**Fait 2** la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $M_G$  est inversée lorsque l'on fait un demi-twist sur un côté de  $G$  (voir Rem. 2.27).

Par ces deux faits, l'indépendance par rapport au choix du disque  $D$ , de son orientation et des côtés  $e_i$  est facilement démontrée.

On montre maintenant l'indépendance par rapport au choix des feuilles  $K_i$ . Supposons par exemple que  $K'_1$  est un autre choix pour  $K_1$ . Alors, d'après Lemme 3.3 b) (ii), il existe une surface orientée plongée  $F$  dans  $1_\Sigma$  telle que  $\partial F = K_1 \dot{\cup} (-K'_1)$  et telle que, si  $k$  (resp.  $k'$ ) est le framing de  $K_1$  (resp.  $K'_1$ ) relativement à  $F$ ,  $(k - k')$  est pair. On suppose aussi la transversalité de  $F$  avec les côtés du Y-graphe, et avec les deux autres feuilles  $K_2$  et  $K_3$ . Soit  $g(F)$  le genre de  $F$ ,  $m$  le nombre de points d'intersection de  $F$  avec les côtés, et pour  $i = 2, 3$ , soit  $n_i$  le nombre de points d'intersection de  $F$  avec  $K_i$ . Si tous les entiers  $g(F)$ ,  $(k - k')$ ,  $m$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont nuls, les deux Y-graphes sont isotopes et il n'y a rien à prouver. Dans le cas général, on rappelle du lemme 1.42 qu'il existe une procédure de *simplification des feuilles*, qui s'énonce ainsi dans le cas des cylindres d'homologie :

**Lemme 3.7.** Soit  $T$  un arbre de clasper de  $Y$ -degré  $k$  acceptable pour  $M \in \overline{\mathcal{C}}(\Sigma)$ , et  $T_1, T_2$  obtenus de  $T$  en scindant une feuille  $f$  (voir Figure 15). Alors

$$M_T \sim_{Y_{k+1}} M_{T_1} \cdot M_{T_2}.$$

En scindant  $(g(F) + |k - k'|/2 + m + n_2 + n_3)$  fois la feuille  $K_1$ ,  $n_2$  fois

la feuille  $K_2$  et  $n_3$  fois la feuille  $K_3$ , on voit que le résultat  $\psi(Y[z_1, z_2, z_3])$  dans  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  défini par le choix de  $K_1$  diffère de celui défini par  $K'_1$  par des éléments de la forme  $(1_\Sigma)_G$ , où  $G$  satisfait une des conditions suivantes :

- (i)  $G$  a une feuille qui borde une surface de genre 1 disjointe de  $G$ , par rapport à laquelle cette feuille est 0-framée ;
- (ii)  $G$  a une feuille qui borde un disque disjoint de  $G$ , par rapport auquel elle est  $(\pm 2)$ -framée ;
- (iii)  $G$  a une feuille qui borde un disque par rapport auquel elle est 0-framée, et ce disque intersecte  $G$  en exactement un point appartenant à un côté ;
- (iv)  $G$  a deux feuilles qui s'enlacent à la manière d'un entrelacs de Hopf.

Vérifions à présent que tous ces éléments s'annulent dans  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ . Si  $G$  est du type (i), l'effet de chirurgie de  $G$  est celui d'un clasper de degré 2 (appliquer les mouvements 2 et 10 d'Habiro). Si  $G$  est de type (ii), en coupant à nouveau sa feuille on obtient  $(1_\Sigma)_G = 2 \cdot (1_\Sigma)_{G'}$  où  $G'$  a une feuille *spéciale*, c'est-à-dire bordant un disque disjoint de  $G$  et par rapport auquel elle est  $(+1)$ -framée. Mais alors  $(1_\Sigma)_{G'} = -(1_\Sigma)_{G'}$  par le Fait 2. Si  $G$  est de type (iii), en appliquant le Fait 1 le côté peut être glissé à l'extérieur de la feuille, donnant alors un Y-graphe avec une feuille *triviale*, qui n'a pas d'effet de chirurgie (voir la proposition 1.7). Si  $G$  est de type (iv), on obtient en appliquant le mouvement 2 d'Habiro un Y-graphe avec un côté bouclé : un tel terme est nul dans  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ . En effet, l'entrelacs de chirurgie associé à ce clasper est Kirby-équivalent à l'entrelacs vide (voir par exemple [GGP, Lem. 2.3]). Ceci complète la preuve de l'indépendance par rapport au plongement  $p$ .

Montrons maintenant que l'application  $\psi$  est compatible avec les relations de  $\mathcal{A}_1(P)$ . La relation de multilinéarité provient du lemme 3.7. En effet, soit  $G$  un Y-graphe acceptable dans  $\Sigma \times I$ , et  $K$  une de ses feuilles. On scinde la feuille  $K$  en  $K_1$  et  $K_2$ , et on appelle  $G_1$  et  $G_2$  les Y-graphes correspondants. Alors,  $(\Sigma \times I)_G = (\Sigma \times I)_{G_1} \cdot (\Sigma \times I)_{G_2} \in \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ . Comme  $K$  est la somme connexe de  $K_1$  et  $K_2$ , on a par Lemme 3.3 b) (iii) :  $t_K = t_{K_1} + t_{K_2} \in P$ .

La relation Glissement est vérifiée dans  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  grâce au mouvement de "glissement de feuille" de la proposition 1.11. Pour cela, soit  $G$  un Y-graphe dans  $1_\Sigma$  avec une feuille spéciale  $F$  :  $t_F = s$ . Soient  $K_1$  et  $K_2$  les deux autres feuilles de  $G$  : en glissant la feuille  $F$  le long de  $K_1$ , on obtient un nouveau Y-graphe  $G'$  avec le même effet de chirurgie que  $G$ , tel que  $K'_1 = K_1$  et tel que  $F'$  est la somme connexe de  $K_1$  et  $F$  avec un  $(+1)$ -twist additionnel. Par le lemme 3.3 b) (iii) et (iv), on a alors  $t_{F'} = t_{K_1} + t_F + s = t_{K_1} \in P$ . Cela montre que la relation  $Y[s, z_1, z_2] = Y[z_1, z_1, z_2]$  ( $z_1, z_2 \in P$ ) est satisfaite dans  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ .

La surjectivité de  $\psi$  suit immédiatement du fait que le groupe abélien libre  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  est engendré par les  $(\Sigma \times I)_G$  où  $G$  est un Y-graphe connexe (ce qui se prouve aussi par des calculs de claspers standards).  $\square$

### 3.1.4 L'isomorphisme de groupes abéliens $\rho$

Rappelons de l'exemple 3.1 que le groupe abélien  $\mathcal{A}_1(H, 0)$  peut être identifié avec  $\Lambda^3 H$ , et de même pour  $\mathcal{A}_1(H_{(2)}, 0)$  avec  $\Lambda^3 H_{(2)}$ . Le lemme suivant va nous permettre d'identifier  $\mathcal{A}_1(B^{(1)}, \bar{1})$  avec  $B^{(3)}$ .

**Lemme 3.8.** *Soit  $\gamma : \mathcal{A}_1(B^{(1)}, \bar{1}) \longrightarrow B^{(3)}$  l'application donnée par la multiplication des couleurs des  $Y$ -graphes abstraits :  $\gamma(Y[z_1, z_2, z_3]) = z_1 z_2 z_3$ . Alors,  $\gamma$  est un isomorphisme bien défini.*

*Démonstration.* Le fait que  $\gamma$  est bien définie est clair (en effet, on a  $\bar{f}^2 = \bar{f}$ ,  $\forall f \in B^{(1)}$ ). Pour montrer que  $\gamma$  est un isomorphisme, il suffit de construire un épimorphisme  $B^{(3)} \xrightarrow{\varsigma} \mathcal{A}_1(B^{(1)}, \bar{1})$  tel que  $\gamma \circ \varsigma$  est l'identité.

En choisissant une base  $(e_j)_{j=1}^{2g+n-1}$  pour  $H = H_{g,n}$ , on détermine un isomorphisme entre  $B^{(3)}$  et  $\mathbf{Z}_2 \oplus H_{(2)} \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus \Lambda^3 H_{(2)}$  : pour  $k = 1, 2, 3$  et  $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, 2g+n-1\}$  deux à deux distincts, le monôme  $\prod_{i=1}^k \bar{e}_{j_i}$  est identifié avec le produit extérieur  $\wedge_{i=1}^k e_{j_i}$ , et  $\bar{1}$  avec  $1 \in \mathbf{Z}_2$ . Comme  $B^{(1)}$  est un groupe d'ordre 2, il en est de même pour  $\mathcal{A}_1(B^{(1)}, \bar{1})$  par la relation de multilinéarité. Alors, il suffit de définir  $\varsigma$  sur la  $\mathbf{Z}_2$ -base de  $\mathbf{Z}_2 \oplus H_{(2)} \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus \Lambda^3 H_{(2)} \simeq B^{(3)}$  mentionnée ci-dessus. On pose  $\varsigma(1) = Y[\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}]$ ,  $\varsigma(e_j) = Y[\bar{e}_j, \bar{1}, \bar{1}]$ ,  $\varsigma(e_{j_1} \wedge e_{j_2}) = Y[\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \bar{1}]$  (avec  $j_1 \neq j_2$ ) et  $\varsigma(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge e_{j_3}) = Y[\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \bar{e}_{j_3}]$  (avec  $j_1, j_2, j_3$  deux à deux distincts). L'application  $\varsigma$  est surjective par les relations multilinéarité et glissement, et satisfait clairement  $\gamma \circ \varsigma = Id$ .  $\square$

On a par fonctorialité une application naturelle

$$\underbrace{\mathcal{A}_1((H, 0) \times_{(H_{(2)}, 0)} (B^{(1)}, \bar{1}))}_P \xrightarrow{\rho} \underbrace{\mathcal{A}_1(H, 0) \times_{\mathcal{A}_1(H_{(2)}, 0)} \mathcal{A}_1(B^{(1)}, \bar{1})}_{\simeq \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)}}$$

**Lemme 3.9.** *L'application  $\rho : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On procède comme pour le lemme 3.8. Il suffit de construire un épimorphisme

$$\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{A}_1(P)$$

tel que  $\rho \circ \epsilon$  est l'identité.

Prenons une base  $(e_i)_{i=1}^{2g+n-1}$  de  $H$  : on a vu dans la preuve du lemme 3.8 que ce choix détermine un isomorphisme non canonique entre  $B^{(3)}$  et  $\Lambda^3 H_{(2)} \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$ . Il définit donc aussi un isomorphisme entre  $\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)}$  et  $\Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$ . On définit à présent  $\epsilon$  en posant

- (i)  $\epsilon(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = Y[(e_i, \overline{e_i}), (e_j, \overline{e_j}), (e_k, \overline{e_k})]; 1 \leq i < j < k \leq 2g + n - 1,$
- (ii)  $\epsilon(e_i \wedge e_j) = Y[(e_i, \overline{e_i}), (e_j, \overline{e_j}), (0, \overline{1})],$  avec  $1 \leq i < j \leq 2g + n - 1,$
- (iii)  $\epsilon(e_i) = Y[(e_i, \overline{e_i}), (0, \overline{1}), (0, \overline{1})],$  avec  $1 \leq i \leq 2g + n - 1,$
- (iv) et  $\epsilon(1) = Y[(0, \overline{1}), (0, \overline{1}), (0, \overline{1})].$

Ici, les éléments de  $P$  sont notés comme dans la remarque 3.4. Cette assignation définit bien  $\epsilon$ , car (i) détermine  $\epsilon$  sur une base du groupe libre  $\Lambda^3 H$ , alors que (ii), (iii) et (iv) envoient chaque élément de base du  $\mathbf{Z}_2$ -espace vectoriel  $\Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$  sur des éléments de  $\mathcal{A}_1(P)$  d'ordre au plus 2. Clairement, appliquer  $\epsilon$  puis  $\rho$  donne l'identité. Prenons maintenant un générateur  $Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P)$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $z_i \in P$  peut être écrit comme une combinaison linéaire de certains  $(e_j, \overline{e_j})$  et de  $(0, \overline{1})$ . Les relations Multilinéarité et Glissement (et donc AS) nous permettent de conclure que  $Y[z_1, z_2, z_3]$  est réalisé par  $\epsilon$ .  $\epsilon$  est donc surjective.  $\square$

### 3.2 Cas des cylindres d'homologie sur une surface avec au plus une composante de bord

Dans ce paragraphe,  $\Sigma$  peut être  $\Sigma_g$  ou  $\Sigma_{g,1}$ . Les notations  $H$ ,  $B^{(k)}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) et  $P$  sont adoptées pour désigner respectivement les groupes abéliens  $H_{g,1}$ ,  $B_{g,1}^{(k)}$  et  $P_{g,1}$  de la section précédente.

Dans la première moitié de cette section, le premier homomorphisme de Johnson et les homomorphismes de Birman-Craggs sont étendus au monoïde des cylindres d'homologie.

#### 3.2.1 Le premier homomorphisme de Johnson pour les cylindres d'homologie

La notion d'homomorphismes de Johnson pour les cobordismes d'homologie sur  $\Sigma_{g,1}$  a été introduite dans [GL].

Le groupe fondamental de  $\Sigma$  avec point base  $* \in \Sigma$  sera noté  $\pi^{(*)}$ , et  $\pi_k^{(*)}$  désignera le  $k^{ieme}$  terme de sa série centrale descendante, initialisée en  $\pi_1^{(*)} = \pi^{(*)}$ . On note  $(x_i, y_i)_{i=1}^g$  les courbes basées représentées dans Fig. 19 ou leur image par l'inclusion  $\Sigma_{g,1} \subset \Sigma_g$ . Alors,

$$\text{dans le cas à bord, } \pi^{(*)} = F(x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g),$$

$$\text{et dans le cas clos, } \pi^{(*)} = \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \mid \prod_{i=1}^g [x_i, y_i] = 1 \rangle.$$

Rapellons de §2.1.1 que, pour tout cobordisme d'homologie  $(M, i^+, i^-) \in \mathcal{C}(\Sigma)$ , l'application  $i^\pm$  induit un isomorphisme au niveau de chaque quotient nilpotent. On choisit un chemin  $\gamma \subset M$  allant de  $i^+(*)$  à  $i^-(*)$ , et on considère la composée suivante :

$$\frac{\pi^{(*)}}{\pi_3^{(*)}} \xrightarrow{i_3^+} \frac{\pi_1(M, i^+(*))}{\pi_1(M, i^+(*))_3} \xrightarrow{c_\gamma} \frac{\pi_1(M, i^-(*))}{\pi_1(M, i^-(*))_3} \xrightarrow{(i_3^-)^{-1}} \frac{\pi^{(*)}}{\pi_3^{(*)}}.$$

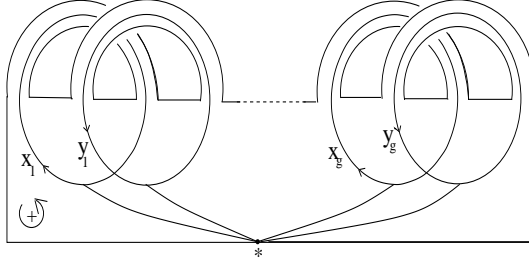


FIG. 19 – Les courbes basées  $(x_i, y_i)_{i=1}^g$  sur  $\Sigma_{g,1}$

Considérons à automorphismes intérieurs près, c'est indépendant du choix de  $\gamma$ , si bien que l'on a une application bien définie

$$\mathcal{C}(\Sigma) \xrightarrow{\eta_1^{(*)}} \text{Out} \left( \frac{\pi^{(*)}}{\pi_3^{(*)}} \right),$$

satisfaisant  $\eta_1^{(*)}(M \cdot N) = \eta_1^{(*)}(N) \cdot \eta_1^{(*)}(M)$ . Soit  $\star$  un autre point base dans  $\Sigma$ , et  $\gamma$  un chemin arbitraire entre  $*$  et  $\star$ . La conjugation par  $\gamma$  induit un isomorphisme  $\text{Out} \left( \pi^{(*)}/\pi_3^{(*)} \right) \simeq \text{Out} \left( \pi^{(*)}/\pi_3^{(*)} \right)$ . Cet isomorphisme est indépendant du choix du chemin  $\gamma$ , et les applications  $\eta_1^{(*)}$  et  $\eta_1^{(*)}$  sont compatibles par celui-ci. Ainsi, on a un groupe bien défini, noté  $\text{Out}(\pi/\pi_3)$  et un anti-homomorphisme de monoïdes

$$\mathcal{C}(\Sigma) \xrightarrow{\eta_1} \text{Out} \left( \frac{\pi}{\pi_3} \right). \quad (8)$$

Si on se restreint au cas des cylindres d'homologie, on obtient une application :

$$\mathcal{C}_1(\Sigma) \xrightarrow{\eta_1} \text{Ker} \left( \text{Out} \left( \frac{\pi}{\pi_3} \right) \rightarrow \text{Out} \left( \frac{\pi}{\pi_2} \right) \right).$$

On a la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \text{Hom} \left( H, \frac{\pi_2^{(*)}}{\pi_3^{(*)}} \right) \longrightarrow \text{Aut} \left( \frac{\pi^{(*)}}{\pi_3^{(*)}} \right) \longrightarrow \text{Aut} \left( \frac{\pi^{(*)}}{\pi_2^{(*)}} \right)$$

où tout  $f \in \text{Hom} \left( H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)} \right)$  est envoyé sur l'automorphisme de  $\pi^{(*)}/\pi_3^{(*)}$  qui envoie  $\bar{x}$  sur  $\bar{x}f(\bar{x})$  (avec  $x \in \pi^{(*)}$ ). D'où la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \frac{\text{Hom} \left( H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)} \right)}{[H, -]} \longrightarrow \text{Out} \left( \frac{\pi}{\pi_3} \right) \longrightarrow \text{Out} \left( \frac{\pi}{\pi_2} \right).$$

Ici,  $[H, -]$  désigne le sous-groupe de  $\text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)$  des homomorphismes  $[h, -]$  définis pour tout  $h \in H$  par  $x \longmapsto [h, x]$ , où  $H$  est identifié avec  $\pi_1^{(*)}/\pi_2^{(*)}$ . On a par conséquent l'anti-homomorphisme de monoïdes

$$\mathcal{C}_1(\Sigma) \xrightarrow{\eta_1} \frac{\text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)}{[H, -]}.$$

Par la suite, on note  $\mathbf{L}(H) = \oplus_n \mathbf{L}_n(H)$ , la  $\mathbf{Z}$ -algèbre de Lie libre sur le  $\mathbf{Z}$ -module  $H$ , et on distingue le cas à bord du cas clos.

Dans le cas à bord, puisque  $\pi^{(*)}$  est libre et  $H$  est l'abelianisé de  $\pi^{(*)}$ ,  $\mathbf{L}_2(H)$  est canoniquement isomorphe à  $\pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}$ . Il y a de plus une suite d'isomorphismes  $\text{Hom}(H, \mathbf{L}_2(H)) \simeq H^* \otimes \mathbf{L}_2(H) \simeq H \otimes \mathbf{L}_2(H)$ , le dernier état induit par  $\lrcorner$ -dualité. Par ces isomorphismes,  $[H, -] \subset \text{Hom}(H, \mathbf{L}_2(H))$  devient  $A_{g,1} \subset H \otimes \mathbf{L}_2(H)$  défini par

$$A_{g,1} = \left\{ \sum_{i=1}^g (x_i \otimes [h, y_i] - y_i \otimes [h, x_i]) \mid h \in H \right\}.$$

Ainsi,  $\eta_1$  prend ses valeurs dans

$$\frac{\text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)}{[H, -]} \simeq \frac{H \otimes \mathbf{L}_2(H)}{A_{g,1}}.$$

Le groupe  $\Lambda^3 H$  peut être vu comme un sous-groupe de  $H \otimes \mathbf{L}_2(H)$  de la façon suivante :

$$0 \longrightarrow \Lambda^3 H \xrightarrow{\nu} H \otimes \mathbf{L}_2(H) \xrightarrow{[-, -]} \mathbf{L}_3(H),$$

où  $\nu$  est défini par  $\nu(x \wedge y \wedge z) = x \otimes [y, z] + y \otimes [z, x] + z \otimes [x, y]$ . Composer  $\nu$  avec la projection  $H \otimes \mathbf{L}_2(H) \longrightarrow H \otimes \mathbf{L}_2(H)/A_{g,1}$  nous donne toujours une injection

$$\Lambda^3 H \xhookrightarrow{\nu} \frac{H \otimes \mathbf{L}_2(H)}{A_{g,1}}.$$

C'est une conséquence du fait suivant :

$$\forall h \in H, \quad [h, \omega] = 0 \in \mathbf{L}_3(H) \implies h = 0, \quad (9)$$

où  $\omega = \sum_i [x_i, y_i] \in \mathbf{L}_2(H)$  correspond *via* l'isomorphisme canonique  $\mathbf{L}_2(H) \simeq \Lambda^2 H$  à l'élément symplectique  $\omega$ , défini dans §2.1.

Prouvons maintenant que  $\eta_1$  prend ses valeurs dans le sous-groupe  $\Lambda^3 H$ . Supposons pour cela que  $f \in \text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right) \subset \text{Aut}\left(\pi^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)$  est tel qu'il existe un relèvement  $\tilde{f} \in \text{End}(\pi^{(*)})$  de  $f$  fixant l'élément bord

$\partial := \prod_{i=1}^g [x_i, y_i]$  modulo  $\pi_4^{(*)}$ . Notons que cette propriété est vérifiée par un représentant de  $\eta_1(M)$  si  $M$  est un cylindre d'homologie, si bien que prouver que  $f \in \text{Ker}([-,-])$  suffira à prouver que  $\text{Im}(\eta_1) \subset \Lambda^3 H$ . Soient  $X_i = x_i^{-1} \tilde{f}(x_i) \in \pi_2^{(*)}$  et  $Y_i = y_i^{-1} \tilde{f}(y_i) \in \pi_2^{(*)}$ . On a

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\partial) &= \prod_i [\tilde{f}(x_i), \tilde{f}(y_i)] \\ &\equiv \prod_i [x_i X_i, y_i Y_i] \\ &\equiv \prod_i [x_i, y_i] [X_i, Y_i] \mod \pi_4^{(*)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\prod_i [X_i, Y_i] \equiv 1 \mod \pi_4^{(*)}$ . Par conséquent,

$$\sum_i (x_i \otimes Y_i - y_i \otimes X_i) \in H \otimes \mathcal{L}_2(H),$$

qui correspond essentiellement à  $f$ , est envoyé sur 0 par l'application crochet de Lie.

Considérons à présent sur le cas clos.

L'application canonique  $\mathcal{L}_2(H) \longrightarrow \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}$  induit un isomorphisme entre  $\pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}$  et  $\mathcal{L}_2(H)/\omega$ .  $\eta_1$  prend donc dans ce cas ses valeurs dans

$$\frac{\text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)}{[H, -]} \simeq \frac{H \otimes \mathcal{L}_2(H)}{A_g}$$

où  $A_g = A_{g,1} + H \otimes \omega$ . Puisque  $\nu(\omega \wedge H) \subset A_g$ ,  $\nu$  se factorise pour donner :

$$\frac{\Lambda^3 H}{\omega \wedge H} \xrightarrow{\nu} \frac{H \otimes \mathcal{L}_2(H)}{A_g}.$$

Il suit aussi de (9) que cette application  $\nu$  est injective.  $\Lambda^3 H/\omega \wedge H$  peut être vu comme un sous-groupe de  $\text{Hom}\left(H, \pi_2^{(*)}/\pi_3^{(*)}\right)/[H, -]$ . De même que dans le cas à bord, on montre que  $\eta_1$  prend ses valeurs dans  $\Lambda^3 H/\omega \wedge H$ .

Jusque là, on a défini des anti-homomorphismes de monoïdes

$$\mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\eta_1} \Lambda^3 H \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_1(\Sigma_g) \xrightarrow{\eta_1} \frac{\Lambda^3 H}{\omega \wedge H},$$

mais le lemme suivant nous permet d'aller un peu plus loin.

**Lemme 3.10.** *Soit  $(M, i^+, i^-)$  un cylindre d'homologie sur  $\Sigma$ , et  $G$  un clasper de  $Y$ -degré 2 acceptable dans  $M$ . Soit  $(M_G, K_G)$  le resultat de la chirurgie le long de  $G$ . Alors, il existe un isomorphisme*

$$\frac{\pi_1(M, *)}{\pi_1(M, *)_3} \xrightarrow{\simeq} \frac{\pi_1(M_G, *)}{\pi_1(M_G, *)_3}$$

*qui est compatible avec les applications  $i^\pm$ , et tel que, pour tout lacet  $K$  basé en  $*$   $\in M$  disjoint de  $G$ ,  $[K]$  est envoyé sur  $[K_G]$ .*

Ce lemme nous permet de conclure par la proposition-définition suivante.

**Proposition 3.11.** *Pour les cylindres d'homologie sur  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$  ou  $\Sigma_g$ , on a des homomorphismes bien définis*

$$\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\eta_1} \Lambda^3 H \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) \xrightarrow{\eta_1} \frac{\Lambda^3 H}{\omega \wedge H},$$

induits par l'application (8) ; ils sont appelés les premiers homomorphismes de Johnson.

**Remarque 3.12.** La composition de  $\eta_1$  avec l'application  $C : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$  est l'homomorphisme classique défini dans [J3].

**Preuve du Lemme 3.10.** En utilisant le mouvement 10 d'Habiro, on montre que

$$M_G \cong M \setminus \text{int}(N(G)) \cup_{j|_{\partial}} (H_4)_L$$

où  $H_4 \xrightarrow{j} M$  est un plongement orienté du corps en anses standard de genre 4 sur  $N(G)$ , qui est un voisinage régulier de  $G$  dans  $M$ , et où  $L = L_1 \cup L_2$  est l'entrelacs à deux composantes framé représenté dans la Fig. 20.<sup>15</sup> Par ce difféomorphisme,  $K_G$  est envoyé sur  $K \subset M \setminus \text{int}(N(G))$ .

De plus,  $L$  est Kirby-équivalent à l'entrelacs à trois composantes  $N$  représenté dans la partie droite de Fig. 20. Il s'avère que  $N$  est un entrelacs bord.

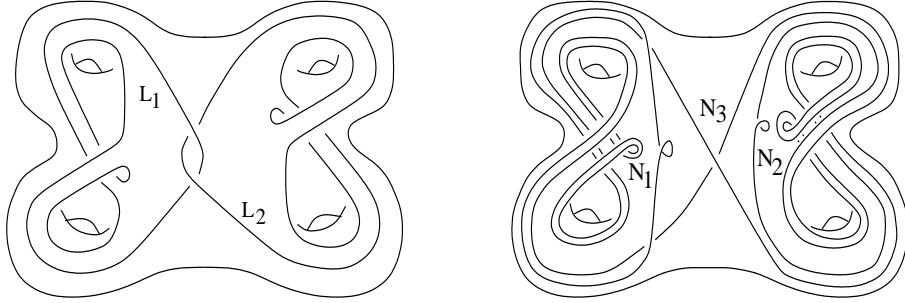


FIG. 20 – L'entrelacs framé à deux composantes  $L$  et un entrelacs bord Kirby-équivalent  $N$

Plus précisément, à une correction  $(\pm 1)$  du framing près, on peut pousser de façon disjointe  $N_3$ ,  $N_1$  puis  $N_2$  sur le bord de  $H_4$ . On obtient des courbes fermées simples sur  $\Sigma_4 = \partial H_4$ , qui sont des courbes séparantes. Un twist le long de chacune de ces courbes induit donc l'identité au niveau de  $\pi_1(\Sigma_4, *) / \pi_1(\Sigma_4, *)_3$ . On prouve donc le lemme par un argument du type Van Kampen.  $\square$

<sup>15</sup>On utilise la convention d'épaississement du tableau.



### 3.2.2 Homomorphismes de Birman-Craggs pour les cylindres d'homologie

Les homomorphismes de Birman-Craggs furent définis dans [BC] et furent énumérés dans [J2]. J. Levine a aussi fait remarquer dans [Lev1] comme ils pouvaient être étendus aux cylindres d'homologie. Dans ce paragraphe, on présente les homomorphismes de Birman-Craggs de façon auto-contenue. Pour cela, on utilise le raffinement spin de la théorie d'invariants de type fini de Goussarov-Habiro, introduite par G. Massuyeau dans [Ma].

On commence par fixer un certain nombre de notations. Si  $(M, \sigma)$  est une 3-variété spinorielle close,  $R(M, \sigma) \in \mathbf{Z}_{16}$  désignera son invariant de Rochlin (voir §4.2.1). Si  $M$  est une sphère d'homologie, on notera  $\sigma_0$  son (unique) structure spin. Rappelons de [Ma] que la chirurgie le long d'un  $Y$ -graphe fait aussi sens pour les 3-variétés spinorielles :

$$\left( \begin{array}{l} \text{Données : (i) } (M, \sigma), \text{ 3-variété close spinorielle} \\ \text{(ii) } G, \text{ } Y\text{-graphe dans } M \end{array} \right) \rightsquigarrow \text{Résultat : } (M_G, \sigma_G).$$

Le lemme suivant décrit précisément comme l'invariant de Rochlin est modifié lors de la chirurgie le long d'un  $Y$ -graphe.

**Lemme 3.13.** *Soit  $(M, \sigma)$  une 3-variété close spinorielle, et soit  $G$  un  $Y$ -graphe dans  $M$  dont les feuilles sont ordonnées, orientées et notées  $K_1, K_2$  et  $K_3$ . Alors,*

$$R(M_G, \sigma_G) - R(M, \sigma) = 8 \cdot \prod_{k=1}^3 e(t_{K_k})(\sigma) \in \mathbf{Z}_{16}, \quad (10)$$

où  $8 \cdot : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}_{16}$  désigne l'injection usuelle, et où  $t_{K_k} \in H_1(FM; \mathbf{Z})$  et  $e(t_{K_k}) \in A(\text{Spin}(M), \mathbf{Z}_2)$  ont été définis dans §2.2.

*Démonstration.* Soit  $j : H_3 \hookrightarrow M$  le plongement du corps en anses de genre 3, déterminé (à isotopie près) par le  $Y$ -graphe  $G$  dans  $M$ . Alors, il suit de [Ma, Prop. 1] que la variation  $R(M_G, \sigma_G) - R(M, \sigma)$  ne dépend que de  $j^*(\sigma) \in \text{Spin}(H_3)$ . De plus, d'après l'équation (7) de la preuve du lemme 3.3, le membre de droite de (10) est déterminé par  $j^*(\sigma) \in \text{Spin}(H_3)$ .

Pour  $i_1, i_2, i_3 \in \{0, 1\}$ , on note  $G_{i_1 i_2 i_3}$  le  $Y$ -graphe trivial dans  $\mathbf{S}^3$  (dont les feuilles sont ordonnées et orientées) et dont la  $k^{\text{ieme}}$  feuille est triviale et  $i_k$ -framée ; on note aussi  $j_{i_1 i_2 i_3} : H_3 \hookrightarrow \mathbf{S}^3$  le plongement correspondant. Alors,

$$\text{Spin}(H_3) = \{j_{i_1 i_2 i_3}^*(\sigma_0) | i_1, i_2, i_3 \in \{0, 1\}\}.$$

Il suffit donc de prouver l'équation (10) lorsque  $(M, \sigma)$  est  $(\mathbf{S}^3, \sigma_0)$  et pour  $G$  un  $G_{i_1 i_2 i_3}$ . Par Lemme 3.3 b) (iv), le membre de droite de l'équation (10) est 8 si  $i_1 = i_2 = i_3 = 1$  et 0 sinon. Il en est de même pour le membre de gauche de (10). En effet, la chirurgie le long d'un  $Y$ -graphe avec une feuille triviale est sans effet (par la proposition 1.7), et la chirurgie sur  $\mathbf{S}^3$  le long de

$G_{111}$  donne la sphère de Poincaré, dont l'invariant de Rochlin est  $8 \in \mathbf{Z}_{16}$ . Il suit que l'équation (10) est exacte dans ces huit cas particuliers.  $\square$

Soit  $\Sigma = \Sigma_g$  ou  $\Sigma_{g,1}$ . Soit  $j$  un plongement orienté de  $\Sigma$  dans  $\mathbf{S}^3$ , et soit  $M = (M, i^+, i^-)$  un cylindre d'homologie sur  $\Sigma$ . On peut alors découper  $\mathbf{S}^3$  le long de  $Im(j)$ , et recoller  $M$  (en utilisant les identifications  $j, i^+$  et  $i^-$ ). On obtient une nouvelle sphère d'homologie notée

$$\mathbf{S}^3(M, j).$$

On verra dans la proposition 4.3 que l'invariant de Rochlin est un invariant de degré 1 : en particulier, il est préservé par une  $Y_2$ -chirurgie.  $R(\mathbf{S}^3(M, j), \sigma_0)$  ne dépend donc que de la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $M$  (et de  $j$ ). Supposons maintenant que l'on s'est donné une présentation de chirurgie de la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $M$  dans  $1_\Sigma$  :

$$\psi \left( \sum_{i=1}^n \Upsilon [z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3^{(i)}] \right) = M \in \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma).$$

Rappelons que les couleurs  $z_k^{(i)}$  appartiennent à  $P$  et donnent donc des  $e(z_k^{(i)}) \in B_g^{(1)}$ . On pose aussi  $\sigma = j^*(\sigma_0) \in Spin(\Sigma)$ . On déduit alors de (10) la formule *cubique* suivante :

$$\frac{R(\mathbf{S}^3(M, j), \sigma_0)}{8} = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^3 e(z_k^{(i)})(\sigma) \in \mathbf{Z}_2. \quad (11)$$

En particulier, cela montre que :

- (i)  $R(\mathbf{S}^3(M, j), \sigma_0)$  ne dépend que de  $\sigma = j^*(\sigma_0) \in Spin(\Sigma)$  (et la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $M$ ) ;
- (ii) si  $N$  est un autre cylindre d'homologie sur  $\Sigma$ , alors :

$$\frac{R(\mathbf{S}^3(M \cdot N, j), \sigma_0)}{8} = \frac{R(\mathbf{S}^3(M, j), \sigma_0)}{8} + \frac{R(\mathbf{S}^3(N, j), \sigma_0)}{8} \in \mathbf{Z}_2.$$

Nous distinguons à présent le cas  $\Sigma = \Sigma_g$  du cas  $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ .

Dans le cas à bord, toute structure spin  $\sigma$  sur  $\Sigma_{g,1}$  peut être réalisée comme  $j^*(\sigma_0)$  pour un certain plongement  $j : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow \mathbf{S}^3$ . En fait, les plongements spécifiques de  $\Sigma_{g,1}$  dont les images sont données dans Fig. 21 suffisent.

Quant au cas clos, on observe que tout plongement  $j : \Sigma_g \hookrightarrow \mathbf{S}^3$  est séparant, d'où  $\sigma = j^*(\sigma_0)$  est spin-bordant. Réciproquement, toute structure spin sur  $\Sigma_g$  qui spin-borde peut être réalisée ainsi : on choisit un plongement approprié de  $\Sigma_g$  parmi les plongements particuliers dont les images

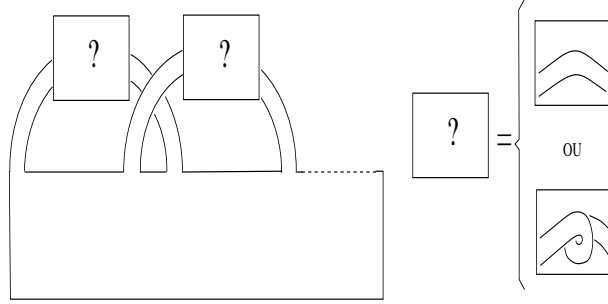


FIG. 21 – Certains plongements particuliers de  $\Sigma_{g,1}$  dans  $\mathbf{S}^3$

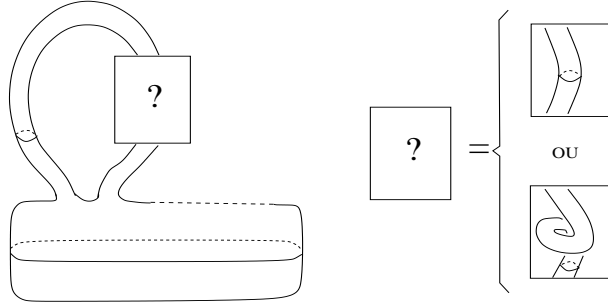


FIG. 22 – Certains plongements particuliers de  $\Sigma_g$  dans  $\mathbf{S}^3$

sont données dans Fig. 22.

Il nous faut encore mentionner deux autres faits sur ces structures spin. Premièrement,  $\sigma \in \text{Spin}(\Sigma_g)$  spin-borde si et seulement si son invariant de Arf, qui est égal à  $\alpha(\sigma)$  comme défini dans l'équation (4) de §2.1.3, s'annule (voir [Ki, p.36]). Deuxièmement, si  $f$  et  $f'$  sont deux polynômes cubiques sur  $\text{Spin}(\Sigma_g)$  (c'est-à-dire  $f, f' \in B_g^{(3)}$ ), alors ils prennent les mêmes valeurs sur les structures spin d'invariant de Arf trivial si et seulement si  $f - f'$  est un multiple de  $\alpha$  (voir [J2, Lem. 14] pour une preuve de ce fait algébrique)<sup>16</sup>.

Tout ce qui a été dit ici nous conduit à la proposition-définition suivante.

**Proposition 3.14.** *Il existe des homomorphismes bien définis*

$$\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{\beta} B_g^{(3)} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) \xrightarrow{\beta} \frac{B_g^{(3)}}{\alpha \cdot B_g^{(1)}},$$

*tels que, pour un cylindre d'homologie  $M$  sur  $\Sigma$  et pour un plongement*

<sup>16</sup>La preuve y est donnée pour un genre  $g \geq 3$  (en utilisant l'identification de  $\text{Spin}(\Sigma_g)$  avec l'ensemble des formes quadratiques sur  $H_1(\Sigma_g, \mathbf{Z}_2)$  de forme bilinéaire symétrique associée, la forme d'intersection modulo 2), mais les mêmes arguments peuvent permettre de prouver que c'est encore vrai pour le genre  $g = 0, 1$  ou  $2$ .

orienté  $j : \Sigma \hookrightarrow \mathbf{S}^3$ , on a

$$\beta(M) \left( q_{j^*(\sigma_0)} \right) = \frac{R(\mathbf{S}^3(M, j), \sigma_0)}{8} \in \mathbf{Z}_2.$$

**Remarque 3.15.** En composant  $\beta$  avec l'application  $C : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma)$ , on obtient les homomorphismes de Birman-Craggs classiques, comme présentés par Johnson dans [J2].

### 3.2.3 Démonstration des théorèmes 2.6 et 2.7

**Le cas à bord : preuve du théorème 2.6.** Rappelons de §3.1.2 que les applications

$$P \xrightarrow{p} (H, 0) \quad \text{et} \quad P \xrightarrow{e} (B_g^{(1)}, \overline{1})$$

sont les projections canoniques du pullback de groupes abéliens spéciaux

$$P = (H, 0) \times_{(H_{(2)}, 0)} (B_g^{(1)}, \overline{1}).$$

Elles sont surjectives.

**Lemme 3.16.** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \\ & \searrow & \downarrow \eta_1 \\ & \mathcal{A}_1(p) & \\ & & \mathcal{A}_1(H, 0). \end{array}$$

*Démonstration.* Vérifions que  $\eta_1(\psi(Y)) = \mathcal{A}_1(p)(Y)$  pour un générateur  $Y = Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P)$ . On pose  $M = \psi(Y)$ , de telle sorte que  $M = (1_{\Sigma_{g,1}})_G$  où  $G$  est un  $Y$ -graphe approprié comme décrit dans §2.3. Ses feuilles sont en particulier ordonnées et orientées, notées  $K_1, K_2$  et  $K_3 : [K_i] = p(z_i) \in H$ . On pose  $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$  et  $\overline{y} \in \pi/\pi_3$ , représentés par  $y \in \pi$  : on veut calculer  $\eta_1(M)$  sur  $\overline{y}$ . On procède comme suit : on choisit une courbe basée immergée  $k$  dans  $\Sigma_{g,1}^+$  représentant  $y$  (via l'identification de  $\Sigma_{g,1}$  avec  $\Sigma_{g,1}^+$ ), on prend un nœud orienté basé  $K \subset M$  dans un collier de  $\Sigma_{g,1}^+$  qui est un poussement de  $k$ , et on trouve un autre nœud basé  $K' \subset M$  dans un collier de  $\Sigma_{g,1}^-$  tel que les paires  $(M, K)$  et  $(M, K')$  sont  $Y_2$ -équivalentes. Alors (via les identifications de  $\Sigma_{g,1}$  avec  $\Sigma_{g,1}^-$ ), ce nœud  $K'$  détermine un  $y' \in \pi$ , et par le lemme 3.10, le résultat  $\eta_1(M)(\overline{y})$  est alors  $\overline{y'} \in \pi/\pi_3$ . Nous expliquons maintenant la procédure pour construire  $K'$  à partir de  $K$ .

Dans  $1_{\Sigma_{g,1}} \setminus G$ ,  $K$  peut être poussé vers le bas dans un collier de  $\Sigma_{g,1}^-$  à certains “doigts” près qui sont de deux types (voir Fig. 23) :

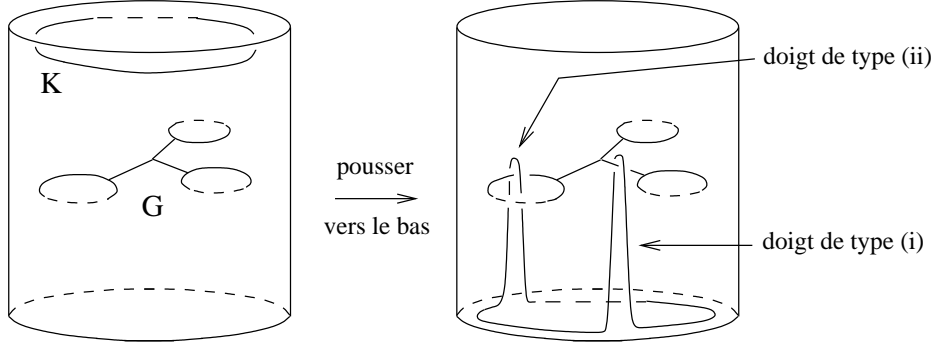


FIG. 23 – Le poussement de la courbe  $K$  le long du cylindre

- (i) le doigt chevauche un côté de  $G$ ,
- (ii) le doigt chevauche une feuille  $K_i$  de  $G$ .

Mais chaque doigt du type (i) peut être isotopé le long du côté correspondant jusqu'au niveau de la feuille et peut donc être remplacé par deux doigts de type (ii), si bien que, à isotopie près de la courbe immergée  $k$  dans  $\Sigma_{g,1}^+$ , on peut supposer que chaque doigt est de type (ii). Comme  $K_i$  a été orienté, chaque doigt vient avec un signe. Soit  $k_i$  une courbe immergée dans  $\Sigma_{g,1}^+ \subset 1_{\Sigma_{g,1}}$  telle que  $[k_i] = p(z_i) \in H$ . On peut supposer que  $K_i$  est un poussement de  $k_i$  (avec éventuellement un twist additionnel) : il y a autant de doigts que de points d'intersection entre  $k_i$  et  $k$  dans  $\Sigma_{g,1}^+$  ; le signe du doigt correspond au signe du point d'intersection contribuant pour  $[k] \cdot [k_i] \in \mathbf{Z}$ .

Un tel doigt peut être réalisé par chirurgie sur un clasper basique. Soit  $K'$  une copie de  $K$  dans un collier de  $\Sigma_{g,1}^- \subset 1_{\Sigma_{g,1}} \setminus G$ . Il y a alors une famille de claspers basiques  $(C_j^{(i)})_{j=1, \dots, n_i}^{i=1,2,3}$  dans  $1_{\Sigma_{g,1}} \setminus G$ , telle que chaque  $C_j^{(i)}$  a une feuille simple qui enlace  $K'$  et une autre feuille simple qui enlace la feuille  $K_i$ , et tel que :

$$(M, K) \text{ est difféomorphe à } (1_{\Sigma_{g,1}}, K') \left( \bigcup_{i,j} C_j^{(i)} \right) \cup G.$$

Suivant le signe du doigt correspondant, chaque clasper basique vient avec un signe noté  $\varepsilon(i, j)$ . En *scindant* la feuille  $K_1$  (voir Lem. 1.42)  $n_1$  fois, on obtient  $n_1$  nouveaux  $Y$ -graphes  $G_j^{(1)}$  ( $j \in \{1, \dots, n_1\}$ ) : deux feuilles de  $G_j^{(1)}$  sont des copies de  $K_2$  et  $K_3$ , et la troisième feuille forme avec une feuille de  $C_j^{(1)}$  un entrelacs de Hopf. Ainsi, en appliquant le mouvement 2 d'Habiro à  $C_j^{(i)} \cup G_j^{(i)}$  on obtient un nouveau  $Y$ -graphe encore noté  $G_j^{(i)}$ . On fait de même pour  $i = 2$  et  $i = 3$ , d'où on obtient :

$$(M, K) \text{ est } Y_2\text{-équivalent à } (1_{\Sigma_{g,1}}, K') \left( \bigcup_{i,j} G_j^{(i)} \right) \cup G.$$

A  $Y_2$ -équivalence près de la paire  $(1_{\Sigma_{g,1}}, K')$   $_{G \cup (\cup_{i,j} G_j^{(i)})}$ , on peut supposer que, pour tout  $(i, j)$ ,  $G_j^{(i)}$  vit dans un collier de  $\Sigma_{g,1}^- \subset 1_{\Sigma_{g,1}}$ . On fait à présent la chirurgie le long de  $G$ , puis le long des  $G_j^{(i)}$  : ces dernières ne modifient pas la 3-variété  $M$  mais changent le nœud. Le nouveau nœud obtenu est toujours noté  $K'$  et satisfait les propriétés demandées.

On calcule maintenant le  $y' \in \pi$  défini par  $K'$ . Au vu du mouvement 10 d'Habiro, la contribution de chaque  $Y$ -graphe  $G_j^{(1)}$  à la modification de  $K'$  est dans  $\pi$  le commutateur  $[k_2, k_3^{-1}]^{\varepsilon(1,j)}$ . Ainsi, on obtient

$$y' \cdot y^{-1} = \prod_{i \in \mathbf{Z}_3} [k_{i+1}, k_{i+2}^{-1}]^{[k] \cdot [k_i]} \in \frac{\pi_2}{\pi_3}. \quad (12)$$

Alors, vu comme un homomorphisme  $H \longrightarrow \pi_2/\pi_3 = L_2(H)$ ,  $\eta_1(M)$  envoie chaque  $h \in H$  sur

$$- \sum_{i \in \mathbf{Z}_3} (h \cdot p(z_i)) \cdot [p(z_{i+1}), p(z_{i+2})] \in L_2(H).$$

ce qui correspond à  $\sum_{i \in \mathbf{Z}_3} p(z_i) \otimes [p(z_{i+1}), p(z_{i+2})]$  dans  $H \otimes L_2(H)$ , et donc à  $p(z_1) \wedge p(z_2) \wedge p(z_3)$  dans  $\Lambda^3 H$ , c'est-à-dire à  $\mathcal{A}_1(p)(Y)$ .  $\square$

**Lemme 3.17.** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\psi} & \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \\ & \searrow \mathcal{A}_1(e) & \downarrow \beta \\ & & \mathcal{A}_1(B_g^{(1)}, \bar{\mathbb{I}}). \end{array}$$

*Démonstration.* D'après la définition de  $\beta$  donnée dans la proposition 3.14, c'est une conséquence directe de l'équation (11).  $\square$

On note encore

$$(H, 0) \xrightarrow{- \otimes \mathbf{Z}_2} (H_{(2)}, 0) \quad \text{et} \quad (B_g^{(1)}, \bar{\mathbb{I}}) \xrightarrow{\kappa} (H_{(2)}, 0),$$

les applications apparaissant dans le diagramme de pullback de  $P$  (voir §2.2). Alors, une conséquence des deux lemmes précédents est que  $\mathcal{A}_1(\kappa)\beta\psi = \mathcal{A}_1(\kappa e) = \mathcal{A}_1((- \otimes \mathbf{Z}_2)p) = \mathcal{A}_1(- \otimes \mathbf{Z}_2)\eta_1\psi$ . Comme  $\psi$  est un epimorphisme, on obtient :  $\mathcal{A}_1(\kappa)\beta = \mathcal{A}_1(- \otimes \mathbf{Z}_2)\eta_1$ . On construit le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(H, 0) \times_{\mathcal{A}_1(H_{(2)}, 0)} \mathcal{A}_1(B_g^{(1)}, \bar{\mathbb{I}}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_1(B_g^{(1)}, \bar{\mathbb{I}}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \mathcal{A}_1(\kappa) \\ \mathcal{A}_1(H, 0) & \xrightarrow{\mathcal{A}_1(- \otimes \mathbf{Z}_2)} & \mathcal{A}_1(H_{(2)}, 0) \end{array}$$

qui, par les identifications mentionnées plus haut, est essentiellement le diagramme de pullback de  $\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$  apparaissant dans §1.3. Par la propriété universelle des pullbacks, il existe donc un homomorphisme

$$\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{(\eta_1, \beta)} \mathcal{A}_1(H, 0) \times_{\mathcal{A}_1(H_{(2)}, 0)} \mathcal{A}_1(B_g^{(1)}, \bar{1}) \simeq \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}.$$

Les lemmes 3.16 et 3.17 peuvent être résumés dans la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\psi} & \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \\ & \searrow \rho & \downarrow (\eta_1, \beta) \\ & & \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}. \end{array}$$

Or, d'après le lemme 3.9 l'application  $\rho : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$  est un isomorphisme. Il suit du diagramme commutatif précédent que  $\psi$  est injective, et donc c'est un isomorphisme : une conséquence est qu'il en est de même pour  $(\eta_1, \beta)$ . La commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xleftarrow{C} & \frac{\mathcal{T}_{g,1}}{\mathcal{T}'_{g,1}} \\ \downarrow (\eta_1, \beta) \simeq & & \nearrow (\eta_1, \beta) \\ \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)} & & \end{array}$$

suit des remarques 3.12 et 3.15. En particulier, pour  $g \geq 3$ ,  $C$  est un isomorphisme car  $(\eta_1, \beta) : \mathcal{T}_{g,1}/\mathcal{T}'_{g,1} \longrightarrow \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$  en est un par [J4].

**Le cas clos : preuve du théorème 2.7.** Un isomorphisme

$$\mathcal{A}_1(P) \xrightarrow{\rho} \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$$

est défini de la même façon que dans le cas à bord (voir Lemme 3.9). Rappelons que  $S$  désigne le sous-groupe du pullback  $\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B_g^{(3)}$  correspondant à  $\omega \wedge H \subset \Lambda^3 H$  et  $\alpha \cdot B_g^{(1)} \subset B_g^{(3)}$ . Ainsi,  $\rho^{-1}(S)$  est le sous-groupe de  $\mathcal{A}_1(P)$  contenant les éléments

$$\sum_{i=1}^g \Upsilon[(x_i, \overline{x_i}), (y_i, \overline{y_i}), z], \quad \text{où } z \text{ est un élément quelconque de } P.$$

**Lemme 3.18.** *Dans le cas clos, l'application de chirurgie  $\psi$  définie dans §2.3 s'annule sur le sous-espace  $\rho^{-1}(S)$ .*

Comme mentionné dans §2.1, ces relations symplectiques  $\rho^{-1}(S)$  apparaissent dans [H] pour de plus grands degrés.

**Preuve du lemme 3.18.** Soit  $z \in P$ , on veut montrer que

$$\sum_{i=1}^g \psi(Y[(x_i, \overline{x_i}), (y_i, \overline{y_i}), z]) = 0 \in \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g). \quad (13)$$

Considérons dans  $1_{\Sigma_g}$  un clasper basique  $G$  avec une feuille triviale  $f$ , et une autre feuille  $f'$  telle que  $t_{f'} = z \in P$ . Alors,  $f$  étant triviale,  $(1_{\Sigma_g})_G$  est diffeomorphe à  $1_{\Sigma_g}$ . De plus,  $f$  peut être vu comme un poussement de  $\partial D$ , où  $D$  est un 2-disque dans  $\Sigma_g^+$  : en particulier,  $f$  borde le poussement de  $\Sigma_g^+ \setminus D$  qui est une surface plongée de genre  $g$ . En appliquant les mouvements 7 et 5 d'Habiro,  $f$  peut être scindée en  $g$  morceaux de telle sorte que  $G$  est équivalent à l'union de  $g$  claspers basiques notés  $G_1, \dots, G_g$ . voir Fig. 24. Chaque clasper  $G_i$  a une feuille qui borde une surface de genre 1 ; en appli-

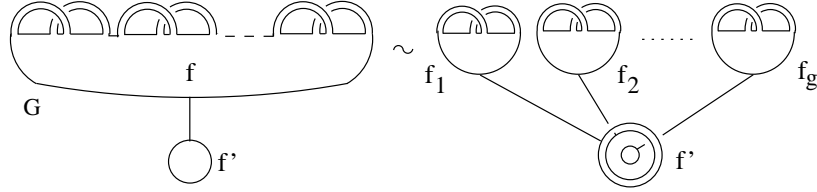


FIG. 24 – Scindement de la feuille nulle-homologue  $f$

quant le mouvement 10 d'Habiro, on voit qu'il est équivalent à un  $Y$ -graphe  $G'_i$ . Conformément à la remarque 3.4, les feuilles des  $G'_i$  représentent  $(x_i, \overline{x_i})$ ,  $(y_i, \overline{y_i})$  et  $z$  dans  $P$ , si bien que  $(1_{\Sigma_g})_{G'_i} = \psi(Y[(x_i, \overline{x_i}), (y_i, \overline{y_i}), z]) \in \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g)$ . L'équation (13) en découle.  $\square$

Par les mêmes arguments, des versions appropriées des lemmes 3.16 et 3.17 sont valables dans le cas à bord :  $\mathcal{A}_1(p) = \eta_1 \circ \psi$  et  $\mathcal{A}_1(e) = \beta \circ \psi$ . Ceci nous conduit à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{A}_1(P)}{\rho^{-1}(S)} & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) \\ & \searrow \rho \simeq & \downarrow (\eta_1, \beta) \\ & & \frac{\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H(2)} B_g^{(3)}}{S} \simeq \frac{\Lambda^3 H}{\omega \wedge H} \times \left( \frac{\Lambda^3 H(2)}{\omega_{(2)} \wedge H(2)} \right) \frac{B_g^{(3)}}{\alpha \cdot B_g^{(1)}} \end{array}$$



duquel il découle que  $\psi$ , et donc  $(\eta_1, \beta)$ , sont des isomorphismes. La commutativité du triangle de droite dans le théorème 2.7 est encore une conséquence des remarques 3.12 et 3.15.

**Invariants de type fini de degré 1 : preuve du corollaire 2.8.** L'implication (1) $\implies$ (2) est un fait général découlant de la définition d'un invariant de type fini. On montre que (2) implique (3) en observant que tout homomorphisme de groupes abéliens  $f : \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma) \longrightarrow A$  fournit un invariant de degré 1 :

Soit  $M$  un cylindre d'homologie sur  $\Sigma$  et soient  $G_1, G_2$  deux  $Y$ -graphes acceptables disjoints dans  $M$ . On veut montrer que :

$$f(M) - f(M_{G_1}) - f(M_{G_2}) + f(M_{G_1 \cup G_2}) = 0. \quad (14)$$

Par la proposition 2.3, on peut supposer que  $M = (1_\Sigma)_G$ , où  $G$  est une collection de  $Y$ -graphes disjoints dans  $1_\Sigma$ . En isotopant  $G_1$  et  $G_2$  dans  $M$ , on peut les voir dans  $1_\Sigma \setminus G$ . On pose alors  $M_i = (1_\Sigma)_{G_i}$  : à  $Y_2$ -équivalence près,  $M_{G_i} = M \cdot M_i$  et  $M_{G_1 \cup G_2} = M \cdot M_1 \cdot M_2$ . L'équation (14) découle alors de l'additivité de  $f$ .

L'équivalence (3) $\Leftrightarrow$ (1) est une conséquence directe des théorèmes 2.7 et 2.6.

**Du cas à bord au cas clos.** Dans ce dernier paragraphe, on *fixe* un plongement

$$\Sigma_{g,1} \xrightarrow{j} \Sigma_g.$$

Soit  $j_* = \phi$  l'isomorphisme entre  $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$  et  $H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z})$  induit par  $j$ . Ceci nous permet d'identifier les ensembles  $H$ ,  $Spin(\Sigma)$ ,  $B_g$  et  $P$  correspondant à  $\Sigma_{g,1}$  avec ceux correspondant à  $\Sigma_g$ .

Rappelons de §2.3.2 l'application de rebouchage surjective  $j : \mathcal{C}(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma_g)$ , qui peut être restreinte à :

$$\mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{j} \mathcal{C}_1(\Sigma_g).$$

Notons que ceci est compatible avec l'application d'"extension par l'identité"  $\mathcal{T}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{T}_g$  définie par  $j$ , et qu'elle induit un homomorphisme de groupes

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g)$$

qui est indépendant du choix de  $j$  (cela se vérifie dans le diagramme ci-dessous). La commutativité du diagramme suivant se prouve facilement à

partir des différentes définitions données précédemment.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & & \\
\downarrow \rho & \searrow \rho & \swarrow (\eta_1, \beta) & \downarrow & \swarrow C \\
& \Lambda^3 H \times \Lambda^3 H_{(2)} B_g^{(3)} & \xleftarrow{(\eta_1, \beta)} & \frac{\mathcal{T}_{g,1}}{\mathcal{T}'_{g,1}} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{\mathcal{A}_1(P)}{\rho^{-1}(S)} & \xrightarrow{\psi} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_g) & & \\
\downarrow \rho & \searrow \rho & \swarrow (\eta_1, \beta) & \downarrow & \swarrow C \\
& \Lambda^3 H \times \Lambda^3 H_{(2)} B_g^{(3)} & \xleftarrow{(\eta_1, \beta)} & \frac{\mathcal{T}_g}{\mathcal{T}'_g} & \\
& \text{S} & & & 
\end{array}$$

### 3.3 Cas général

#### 3.3.1 Une borne supérieure combinatoire

Comme dans la section précédente, on commence par définir un espace de diagrammes et une application de chirurgie pour  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$ .

Commençons par préciser quelques notations. Pour tout  $g \geq 0$  et pour tout  $n \geq 1$ , on note  $H_{g,n} := H_1(\Sigma_{g,n}, \mathbf{Z})$ . De même, on note

$$P_{g,n} = H_{g,n} \times_{(H_{g,n})_{(2)}} A(\text{Spin}(\Sigma_{g,n} \times I), \mathbf{Z}_2)$$

le groupe abélien introduit dans §3.1.2.  $P_{g,n}$  a une structure de groupe abélien spécial avec l'élément  $1 \in \mathbf{Z}_2$ . Soit donc  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  son image par le foncteur  $\mathcal{A}_1$  (défini dans §3.1.1).

On appelle  $\psi$  l'application

$$\tilde{\mathcal{A}}_1(P_{g,n}) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$$

qui envoie chaque générateur  $Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  ( $z_i \in P_{g,n}$ ) sur  $(\Sigma_{g,n} \times I)_{p(Y[z_1, z_2, z_3])}$ , où  $p(Y[z_1, z_2, z_3])$  est un  $Y$ -graphe acceptable dans  $(\Sigma_{g,n} \times I)$  construit comme suit : Pour  $i = 1, 2, 3$ , on choisit des nœuds framés orientés disjoints  $K_i$  dans  $(\Sigma_{g,n} \times I)$  tels que  $t_{K_i} = z_i \in P_{g,n}$  (où  $t$  est l'application surjective du lemme 3.3), puis on plonge un disque orienté  $D$ , disjoint des  $K_i$ , que l'on connecte aux  $K_i$  par des bandes  $e_i$  dans  $(\Sigma_{g,n} \times I)$ , de façon compatible avec les orientations des différents constituants et l'ordre cyclique  $(1, 2, 3)$ .

**Théorème 3.19.** *L'application  $\psi$  est bien définie, surjective.*

Ce résultat se prouve d'une manière identique au théorème 3.6. Dans la section suivante, on montre que  $\psi$  est un fait un isomorphisme.

### 3.3.2 Démonstration du théorème 2.9

On introduit à présent le *plongement standard*  $p$  de la surface de genre  $g$  à  $n$  composantes de bord  $\Sigma_{g,n}$  dans la surface  $\Sigma_{g+n-1,1}$  de genre  $(g+n-1)$  à 1 composante de bord, dont l'image  $p(\Sigma_{g,n})$  est représentée dans la figure 25.

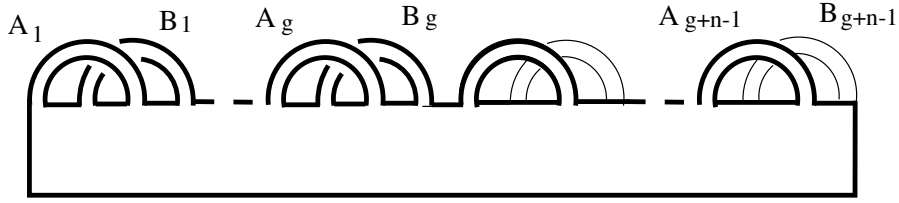


FIG. 25 – L'image  $p(\Sigma_{g,n})$  du plongement standard de  $\Sigma_{g,n}$  dans  $\Sigma_{g+n-1,1}$ .

A tout élément  $M$  de  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$  on peut ainsi associer un élément  $P(M)$  de  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1})$  : on définit ainsi un homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n}) \xrightarrow{P} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1}).$$

Soit de plus

$$r : \Sigma_{g+n-1,1} \times I \mapsto \Sigma_{g,n} \times I$$

l'opération consistant en attacher  $(n-1)$  2-anses  $D^2 \times I$  le long des composantes de bord  $B_i \times I$  ( $i = g+1, \dots, g+n-1$ ) de  $\Sigma_{g,n} \times I$ , où  $B_i$  désigne certaines 1-anses dans la décomposition en anses de  $\Sigma_{g,n}$ , représentées dans la figure 25. Cette construction induit une application (qui n'est pas *a priori* un homomorphisme)

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1}) \xrightarrow{R} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n}),$$

qui est clairement surjective : par exemple, pour tout  $M \in \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1})$  donné par  $M = (\Sigma_{g+n-1,1} \times I)_G$ , un antécédent pour  $R$  est de la forme  $(\Sigma_{g,n} \times I)_{G \cup \Gamma}$ , où  $\Gamma$  est une union de  $Y$ -graphes dont (au moins) une feuille est rendue triviale par  $R$ , et où  $G$  est vu plongé dans  $\Sigma_{g,n} \times I$  via l'inclusion  $\Sigma_{g,n} \times I \hookrightarrow \Sigma_{g+n-1,1} \times I$ .  $R$  est un scindage pour  $P : R \circ P = Id_{\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1})}$ . Il suit que  $P$  est injective.

Par ailleurs, le plongement standard  $p$  de  $\Sigma_{g,n}$  dans  $\Sigma_{g+n-1,1}$  induit une application  $p_* : H_{g,n} \longrightarrow H_{g+n-1,1}$  au niveau de l'homologie. De même, on a une application  $r_* : H_{g+n-1,1} \longrightarrow H_{g,n}$ , clairement surjective. On

observe que  $r_*$  est un scindage pour l'application  $p_*$  : cette dernière est donc injective.

Rappelons que  $\mathcal{A}_1(P)$  a une structure de pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{A}_1(B^{(1)}) \simeq B^{(3)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{A}_1(H) \simeq \Lambda^3 H & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_1(H_{(2)}) \simeq \Lambda^3 H_{(2)}. \end{array}$$

$p_*$  induit une application injective  $\Lambda^3 H_{g,n} \hookrightarrow \Lambda^3 H_{g+n-1,1}$ . De plus, on a par  $p_*$  une application  $\Lambda^3(H_{g,n})_{(2)} \hookrightarrow \Lambda^3(H_{g+n-1,1})_{(2)} : r_*$  induit un scindage pour cette application, qui est donc elle aussi injective. De même, l'isomorphisme (non canonique)  $B^{(3)} \simeq \Lambda^3 H_{(2)} \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$  nous permet de dire que l'on a une application injective  $B_{g,n}^{(3)} \hookrightarrow B_{g+n-1,1}^{(3)}$ , puisqu'un scindage est donné par  $r_*$ .

Il suit que le plongement standard  $p$  induit une application injective entre espaces de diagrammes

$$\mathcal{A}_1(P_{g,n}) \xrightarrow{\mathcal{A}_1(p)} \mathcal{A}_1(P_{g+n-1,1}).$$

On a donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P_{g,n}) & \xrightarrow{\mathcal{A}_1(p)} & \mathcal{A}_1(P_{g+n-1,1}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \simeq \\ \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n}) & \xrightarrow{P} & \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g+n-1,1}) \end{array}$$

dont la commutativité est claire d'après les définitions ci-dessus. Il résulte que l'application de chirurgie surjective

$$\mathcal{A}_1(P_{g,n}) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,n})$$

est injective : c'est donc un isomorphisme.

## 4 $Y$ -filtration pour les string-links framés des boules d'homologie

### 4.1 Borne supérieure combinatoire

Rappelons de §3.1.2 le groupe abélien

$$P_{g,n} = H_{g,n} \times_{(H_{g,n})_{(2)}} A(\text{Spin}(\Sigma_{g,n}), \mathbf{Z}_2),$$

où  $H_{g,n} = H_1(\Sigma_{g,n}, \mathbf{Z})$ . Soit  $\mathcal{A}_1(P_{g,n})$  son image par le foncteur  $\mathcal{A}_1$  (défini dans §3.1.1). On a vu dans §3.1.4 que l'on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathcal{A}_1(P_{g,n}) \xrightarrow{\rho} \Lambda^3 H_{g,n} \times_{\Lambda^3(H_{g,n})_{(2)}} B_{g,n}^{(3)},$$

le terme de droite étant isomorphe à  $\Lambda^3 H_{g,n} \oplus \Lambda^2(H_{g,n})_{(2)} \oplus (H_{g,n})_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$  (non canoniquement).

On appelle  $\phi$  l'application

$$\mathcal{A}_1(P_{0,n+1}) \xrightarrow{\phi} \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$$

qui à chaque générateur  $Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P_{0,n+1})$  ( $z_i \in P_{0,n+1}$ ) associe l'élément  $(D^2 \times I, 1_n)_{p(Y[z_1, z_2, z_3])}$ , où  $p(Y[z_1, z_2, z_3])$  est un  $Y$ -graphe acceptable pour  $1_n$  dans  $(D^2 \times I)$  construit à partir des informations contenues dans le diagramme  $Y[z_1, z_2, z_3]$  : pour  $i = 1, 2, 3$ , on choisit des nœuds framés orientés disjoints  $K_i$  dans  $(D^2 \times I) \setminus 1_n$ , tels que  $t_{K_i} = z_i \in P_{0,n+1}$  (où  $t$  est l'application surjective du lemme 3.3), puis on plonge un disque orienté  $D$ , disjoint des  $K_i$  et de  $1_n$ , que l'on connecte aux  $K_i$  par des bandes  $e_i$  dans  $(D^2 \times I) \setminus 1_n$ , de façon compatible avec les orientations des différents constituants et avec l'ordre cyclique dont est équipé le 3-sommet de  $Y[z_1, z_2, z_3]$ . Le résultat suivant se prouve d'une manière identique au théorème 3.6 pour l'application  $\psi$ .

**Théorème 4.1.** *L'application  $\phi$  est bien définie, surjective.*

**Remarque 4.2.** Le théorème 4.1 se montre donc de la même manière que le théorème 3.19, qui donne un énoncé similaire pour les cylindres d'homologie sur une surface quelconque  $\Sigma_{g,n}$ . En particulier, dans le cas  $\Sigma_{0,n+1}$  d'un disque à  $n$  trous, les deux applications de chirurgie (de même source  $\mathcal{A}_1(P_{0,n+1})$ )

$$\mathcal{A}_1(P_{0,n+1}) \xrightarrow{\phi} \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_1(P_{0,n+1}) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{C}}_1(D_n^2).$$

sont essentiellement les mêmes *via* l'application *complémentaire*  $c$  de la re-

marque 2.13. Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P_{0,n+1}) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \\ & \searrow \psi & \downarrow c \\ & & \overline{\mathcal{C}}_1(D_n^2). \end{array}$$

Une conséquence est que l'application de chirurgie  $\phi$  est un isomorphisme (ainsi que  $c$ ). Dans cette section, nous allons prouver cela en construisant un inverse pour  $\phi$  en termes d'invariants d'entrelacs classiques.

Par la suite, on oubliera les indices dans la notation des groupes abéliens ci-dessus lorsque l'on sera dans le contexte du théorème 4.1 :  $P := P_{0,n+1}$  et  $H := H_{0,n+1}$ .

## 4.2 Invariants classiques pour les string-links framés des boules d'homologie

### 4.2.1 Le $\mu$ -invariant de Rochlin des boules d'homologie

Soit  $M$  une 3-variété close munie d'une structure spin  $s$ , et  $(W, S)$  une 4-variété spinorielle lisse et compacte spin-bordée par  $(M, s)$  (c'est-à-dire que  $\partial W = M$  et la restriction de la structure spin  $S$  à  $M$  est  $s$ ). Alors la signature de  $W$  réduite modulo 16,

$$Roch(M, s) := \sigma(W) \in \mathbf{Z}_{16},$$

est un invariant des 3-variétés spinorielles closes bien défini, appelé *invariant de Rochlin* (en particulier,  $Roch(M, s)$  est indépendant du choix de  $W$ ).

Dans le cas des sphères d'homologie, il existe une unique structure spin, et  $Roch(M, s)$  est divisible par 8 :

$$R(M) := \frac{\sigma(W)}{8} \in \mathbf{Z}_2$$

est appelé le  $\mu$ -invariant de Rochlin de  $M$ .

De même, on peut définir une notion de  $\mu$ -invariant pour les éléments  $(M, \sigma)$  de  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$ , en posant  $R(M, \sigma) := R(M)$ . Ici,  $M$  étant une boule d'homologie, on considère la sphère obtenue canoniquement de  $M$  en collant le long du bord une copie de  $B^3$  pour définir son  $\mu$ -invariant. Considérons la restriction de  $R$  à  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$  (désignée par la même lettre)  $R : \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \xrightarrow{R} \mathbf{Z}_2$ . Le résultat suivant de G. Massuyeau implique que  $R$  factorise à

$$R : \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}_2.$$

**Proposition 4.3.** *[Ma, Cor. 1] L'invariant de Rochlin est un invariant de degré 1 pour la théorie de Goussarov-Habiro des 3-variétés spinorielles.*

### 4.2.2 Invariant de Arf

Soit  $K$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M$ , et  $S$  une surface de Seifert orientée pour  $K$ . On note  $g$  le genre de  $S$ .  $H_1(S, \mathbf{Z}_2)$  est alors un  $\mathbf{Z}_2$ -espace vectoriel de dimension  $2g$ . On note  $\cdot$  la forme d'intersection homologique modulo 2 sur  $H_1(S, \mathbf{Z}_2)$  :  $\cdot$  est bilinéaire, symétrique et non-singulière. Soit  $\delta_2 : H_1(S, \mathbf{Z}_2) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$  l'application définie par

$$\delta_2(\alpha) = lk(\alpha, \alpha^+)(mod\ 2),$$

où  $\alpha^+$  désigne une copie parallèle dans le sens normal positif de  $S$  (pour une orientation de  $M$  donnée).

$\delta_2$  est une forme quadratique associée à  $\cdot$  : *l'invariant de Arf du nœud*  $K$  [R] est l'invariant de Arf de la forme quadratique  $\delta_2$ , c'est-à-dire, pour  $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$  une base symplectique quelconque pour  $\cdot$

$$Arf(K) = Arf(\delta_2) = \sum_{i=1}^g \delta_2(a_i) \delta_2(b_i).$$

Il est bien connu que l'invariant de Arf est bien défini, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix de la surface de Seifert  $S$ . C'est une conséquence du lemme suivant, bien connu dans le cas des nœuds de  $S^3$  ([BFK]), et toujours valable pour les nœuds des sphères d'homologie (voir par exemple [GT, §3] pour une preuve).

**Lemme 4.4.** *Soit  $K$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M$ , et soient  $S_0$  et  $S_1$  deux surfaces de Seifert pour  $K$ . Alors  $S_0$  et  $S_1$  sont tube-équivalentes : elles sont reliées par une suite d'isotopies et d'ajouts (et retraites) de tubes (i.e. des 0-chirurgies le long de 1-anses  $D^2 \times D^1$  plongées dans  $M$ , et intersectant la surface en leur lieu d'attachement  $D^2 \times S^0$ ).*

Au niveau de l'homologie de la surface, chaque 'ajout de tube' augmente le rang de 2, des générateurs étant fournis par une paire  $(m, l)$ =(méridien, longitude) du tube. Plus précisément, cette paire forme, avec une base symplectique de la surface initiale, une base symplectique pour la nouvelle surface : on qualifiera donc une telle paire de courbes  $(m, l)$  de paire *symplectique*. Or un tel méridien  $m$  borde un disque (de  $D^2 \times D^1$ ), et a donc un auto-enlacement nul :  $\delta_2(m) = 0$ . Cela implique que l'invariant de Arf de  $K$  reste inchangé lors de l'ajout (ou, de même, le retrait) d'un tube à une surface de Seifert.

**Invariant de Arf et  $Y_2$ -équivalence.** On peut définir une notion d'invariant de Arf sur  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$  (et plus généralement sur l'ensemble  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$ ). Pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , on note  $a_i(M, \sigma)$  l'invariant de Arf de  $\hat{\sigma}_i$ , la  $i^{ieme}$  composante de la fermeture  $\hat{\sigma} \in \hat{M}$  du string-link  $(M, \sigma)$  :

$$a_i(M, \sigma) := Arf(\hat{\sigma}_i).$$

**Proposition 4.5.** *Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , l'application  $a_i : \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$  est un homomorphisme de monoïdes bien défini, appelé le  $i^{ieme}$  invariant de Arf du string-link  $(M, \sigma)$ .*

L'additivité de  $a_i$  est claire, et provient du fait que, pour tous  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ , une surface de Seifert  $S$  pour  $\widehat{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$  est la somme connexe  $S = S_1 \# S_2$  le long d'une bande de surfaces de Seifert  $S_1$  et  $S_2$  pour  $\hat{\sigma}_1$  et  $\hat{\sigma}_2$  respectivement.

**Proposition 4.6.** *L'invariant de Arf des nœuds des sphères d'homologie est invariant par  $Y_2$ -chirurgie.*

*En particulier, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , le  $i^{ieme}$  invariant de Arf des string-links se factorise en l'homomorphisme de groupes abéliens*

$$a_i : \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}_2.$$

*Démonstration.* Soit  $K$  nœud dans une sphère d'homologie  $M$ , et  $G$  un arbre de  $Y$ -degré 2 acceptable pour  $(M, K)$  : il suffit de montrer que

$$Arf(M, K) = Arf(M_G, K_G) \in \mathbf{Z}_2.$$

Considérons une surface de Seifert  $S$  pour  $K$ . On rappelle de la figure 20 (§3.2.1) l'entrelacs de chirurgie à deux composantes  $L = L_1 \cup L_2$  associé à  $G$ , que l'on a représenté dans un voisinage tubulaire de  $G$  (un corps en anses de genre 4) noté  $N$ . Le nœud  $K$  est par définition disjoint de  $G$  : on peut donc le supposer disjoint du voisinage  $N$ . En revanche, il se peut que la surface  $S$  intersecte  $N$  : on peut supposer que  $S$  intersecte  $N$  au niveau des anses  $D^2 \times I$  de  $N$  le long de copies de  $D^2 \times \{t\}$ ;  $t \in I$ .

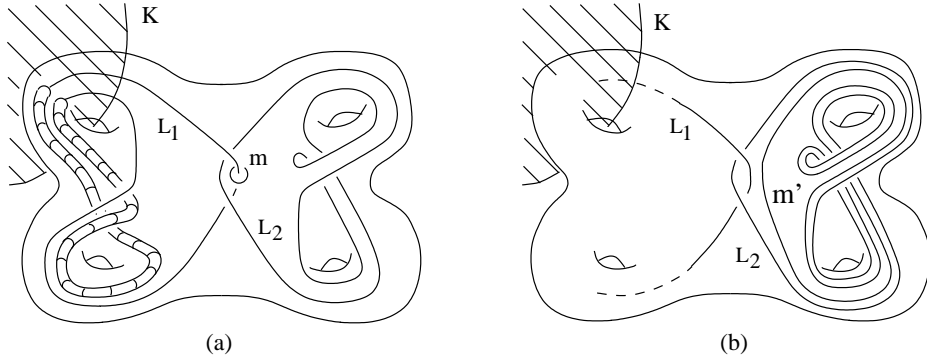


FIG. 26 –

Lorsque la surface  $S$  intersecte ainsi  $N$  le long d'un disque, elle intersecte l'entrelacs  $L$  en deux points : une surface de Seifert  $S'$  pour  $K$ , disjointe de  $L$ , est alors obtenue en ajoutant un tube (qui est une portion du voisinage tubulaire de  $L$ ) comme dans la partie gauche de Fig. 26(a). Comme on l'a



vu, l'ajout d'un tel tube n'affecte pas l'invariant de Arf de  $K$  : si on note  $(m, l)$  un couple méridien/longitude pour ce tube, on a  $\delta_2(m)\delta_2(l) = 0$ . Nous devons voir que ce couple symplectique pour  $H_1(S)$  ne contribue pas non plus pour l'invariant de Arf de  $(K)_G$ . Autrement dit, si on note  $(m', l')$  l'image de  $(m, l)$  par chirurgie le long de  $G$ , nous devons montrer que  $\delta_2(m')\delta_2(l') = 0$ . Pour cela, on observe que le méridien  $m$  peut être isotopé dans la région du croisement entre  $L_1$  et  $L_2$ , comme dans Fig. 26(a). La chirurgie le long de  $L$  envoie alors  $m$  sur  $m'$ , qui est une copie parallèle de  $L_2$  en dehors de la région du croisement entre  $L_1$  et  $L_2$  - voir Fig. 26(b) :  $m'$  vérifie  $\delta_2(m') = lk(m', (m')^+) = 0$ .

Le cas général, où la surface de Seifert  $S$  intersecte plusieurs fois les anses du voisinage  $N$ , se traite d'une manière analogue.  $\square$

**Remarque 4.7.** Une autre preuve de l'invariance de l'invariant de Arf sous  $Y_2$ -chirurgie peut être obtenue de la proposition 4.3 et la formule de [GA, Thm 4], qui identifie l'invariant de Arf d'un nœud au  $\mu$ -invariant de Rochlin de la sphère d'homologie obtenue par chirurgie le long de ce nœud.

#### 4.2.3 Invariant de Sato-Levine

Soit  $L = L_1 \cup L_2$  un entrelacs à deux composantes orientées de nombre d'enlacement nul :  $lk(L_1, L_2) = 0$ . Les composantes de  $L$  bordent des surfaces de Seifert  $S_1$  et  $S_2$  *disjointes de l'entrelacs* :  $L_1 \cap S_2 = L_2 \cap S_1 = \emptyset$ . Ces deux surfaces s'intersectent le long de cercles  $C_1 \cup \dots \cup C_n = C$ . L'auto-enlacement de  $C$  par rapport à l'une ou l'autre de ces surfaces est appelé *l'invariant de Sato-Levine* de  $L$  ([Sa]) :

$$\beta(L) = lk(C, C^+).$$

Ici, l'auto-enlacement de  $C$  par rapport à la surface  $S$  désigne le nombre d'enlacement de  $C$  avec une copie parallèle obtenue en poussant dans le sens normal positif à  $S$ .

$\beta(L)$  est bien défini, c'est-à-dire qu'il est indépendant du choix de  $S_1$  et  $S_2$  : c'est à nouveau une conséquence du lemme 4.4. En effet, lorsqu'on ajoute un tube à la surface de Seifert  $S_1$  (par exemple), celui-ci n'intersecte éventuellement  $S_2$  qu'au niveau d'un méridien  $m$  de ce tube (à isotopie près), c'est-à-dire une courbe qui borde un disque, et n'enlace aucune composante  $C_i$  de  $S_1 \cap S_2$ . On a donc  $lk(m, m^+) = lk(m, C_i^+) = lk(C_i, m^+) = 0$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  : l'invariant de Sato-Levine reste donc inchangé lors de l'ajout (et, de même, le retrait) d'un tel tube.

**Remarque 4.8.** L'invariant de Sato-Levine peut aussi être vu comme un coefficient du polynôme de Conway (voir §5.1.1 pour une définition) : dans le cas où  $L = (L_1, L_2)$  est un entrelacs à deux composantes, le polynôme de Conway est de la forme

$$\nabla_L(z) = z(c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots)$$

avec  $c_0 = lk(L_1, L_2)$  et, si  $c_0 = 0$ ,  $c_2 = -\beta(L)$  ([C2]).

**Invariant de Sato-Levine et  $Y_2$ -équivalence.** On peut, comme pour l'invariant de Arf, définir une notion d'invariant de Sato-Levine sur  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ . Soit  $(M, \sigma) \in \mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ ; pour toute paire d'entiers  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i < j \leq n$ , on note  $\beta_{ij}(M, \sigma)$  l'invariant de Sato-Levine de l'entrelacs à deux composantes obtenu en considérant les  $i^{ieme}$  et  $j^{ieme}$  composantes de la fermeture  $\hat{\sigma} \in \hat{M}$  de  $(M, \sigma)$  :

$$\beta_{ij}(M, \sigma) := \beta(\hat{\sigma}_i \cup \hat{\sigma}_j).$$

L'invariant de Sato-Levine est défini pour les éléments de  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ , puisque d'après la proposition 2.14 ce sont des string-links pour lesquels tous les nombres d'enlacement sont nuls. De plus,  $\beta_{ij}$  est clairement additif.

**Proposition 4.9.**  $\forall 1 \leq i < j \leq n$ , l'application  $\beta_{ij} : \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}$  est un homomorphisme de monoïdes appelé l'invariant de Sato-Levine  $\beta_{i,j}$  du string-link  $(M, \sigma)$ .

**Proposition 4.10.** La réduction modulo 2 de l'invariant de Sato-Levine des entrelacs des sphères d'homologie est invariante par  $Y_2$ -chirurgie.

En particulier, pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , la réduction modulo 2 de l'invariant de Sato-Levine  $\beta_{ij}$  des string-links se factorise en l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\beta_{ij}^{(2)} : \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}_2.$$

*Démonstration.* Soit  $K \cup K'$  un entrelacs à deux composantes d'enlacement nul dans une sphère d'homologie  $M$ , et  $G$  un arbre de  $Y$ -degré 2 acceptable pour  $(M, K \cup K')$ . Montrons donc que

$$\beta^{(2)}(M, K \cup K') = \beta^{(2)}(M_G, K_G \cup K'_G) \in \mathbf{Z}_2.$$

On note respectivement  $S$  et  $S'$  une surface de Seifert pour  $K$  et  $K'$ . Comme dans la preuve de la proposition 4.6, on considère l'entrelacs de chirurgie à deux composantes  $L = L_1 \cup L_2$  associé à  $G$ , dans un voisinage régulier  $N$ . On peut supposer que  $K$  et  $K'$  sont disjoint de  $N$ , mais une ou plusieurs anses  $D^2 \times I$  de  $N$  peuvent en revanche intersecter les surfaces de Seifert  $S$  et  $S'$  au niveau d'un (ou plusieurs) disque(s)  $D^2 \times \{t\}$ .

Lorsque  $S$  ou  $S'$  intersecte ainsi  $N$  (et donc  $L$ ) au niveau d'une anse, on ajoute (dans  $N$ ) un tube à sa surface de Seifert de telle sorte que la nouvelle surface soit disjointe de  $L$  : ce tube est une portion du (bord du) voisinage tubulaire de  $L$  (voir Fig. 26). Nous devons donc nous intéresser aux éventuels éléments de  $S \cap S'$  qui sont créés (dans  $N$ ) par de tels ajouts de tubes. Clairement, une telle intersection intervient le long du méridien d'un tube, c'est-à-dire un petit méridien  $m$  d'une des composantes de  $L$ . Un exemple d'une telle situation est donné dans la figure 27.

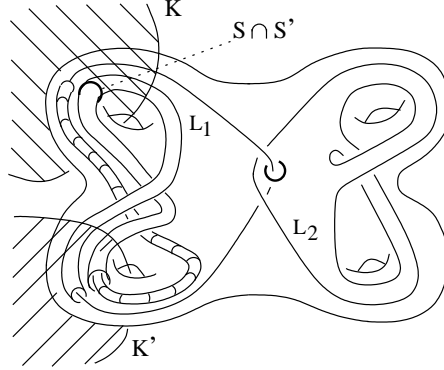


FIG. 27 –

$S \cap S'$  est donc constitué de copies de petits méridiens des composantes d'entrelacs  $L_1$  et  $L_2$  :

- Supposons que  $S \cap S' = \{m\}$ , un méridien d'une des deux composantes. On a déjà vu qu'un tel élément ne contribue pas pour l'invariant de Sato-Levine de l'entrelacs  $K \cup K'$ , puisque  $lk(m, m^+) = 0$ . De même, son image par chirurgie le long de  $G$  ne contribue pas pour l'invariant de Sato-Levine de  $(K \cup K')_G$  : comme dans la preuve de Prop. 4.6, on observe qu'un tel méridien  $m$  peut être isotopé dans la région du croisement entre  $L_1$  et  $L_2$ , et est donc envoyé par chirurgie le long de  $L$  sur une courbe fermée simple qui est comme la courbe  $m'$  de la figure 26(b). Une telle courbe a un auto-enlacement nul (et son nombre d'enlacement avec toute courbe fermée simple de  $M \setminus N$  est 0).

- Maintenant, regardons la situation où  $S \cap S' = \{m_1, m_2\}$ , une paire de méridiens de  $L_1$  et  $L_2$  : cela correspond par exemple à la situation de Fig. 28(a) (où se produit deux fois la situation de la figure 27).

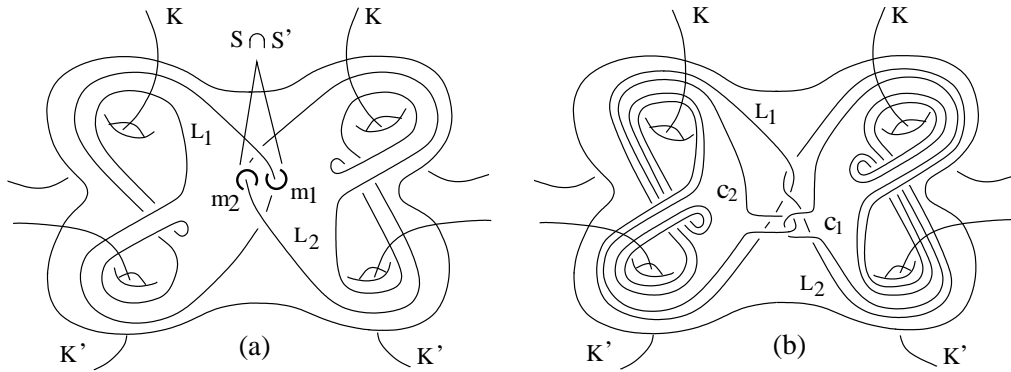


FIG. 28 –

A nouveau, de tels éléments ne contribuent pas pour l'invariant de Sato-

Levine de  $K \cup K'$ . De plus, la chirurgie le long de  $L$  envoie alors les  $(m_1, m_2)$  sur des courbes  $(c_1, c_2)$ , qui sont des copies parallèles de chacune des deux composantes de  $L$ , sauf dans la région du croisement entre  $L_1$  et  $L_2$  où ils sont comme dans Fig. 28(b).  $c_1$  et  $c_2$  vérifient donc

$$\begin{aligned} lk(c_1 \cup c_2, (c_1 \cup c_2)^+) &= lk(c_1, c_1^+) + lk(c_2, c_1^+) + lk(c_1, c_2^+) + lk(c_2, c_2^+) \\ &= 2.lk(c_1, c_2^+) = \pm 2. \end{aligned}$$

La réduction modulo 2 de  $\beta$  reste donc inchangée.

Le cas général, où  $S \cap S'$  est constitué de plusieurs copies du méridien de chaque composantes de  $L$ , se traite d'une manière analogue.  $\square$

#### 4.2.4 Invariants de Milnor

Rappelons de §2.2.1 que, si on note  $D_n^2 = D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  le complémentaire dans  $D^2$  des  $n$  points standards, et  $i_0$  et  $i_1$  les inclusions de  $D_n^2$  respectivement dans les bords inférieurs et supérieurs du complémentaire  $M^\sigma = M \setminus \sigma$ , ces inclusions induisent des isomorphismes au niveau de chaque quotient nilpotent du groupe fondamental ([S]).

On introduit la notion de longueurs d'un string-link :

**Définition 4.11.** Soit  $\sigma_i$  la  $i^{ieme}$  corde du string-link  $\sigma$ . Le framing de  $\sigma$  définit une courbe parallèle à  $\sigma_i$  dans  $M^\sigma$  qui détermine un élément de  $\pi_1(M^\sigma)$ . L'élément correspondant par  $(i_1)_\star^{-1}$  est noté  $\lambda_i = \lambda_i^{(n)} \in F/F_n$  et est appelé la  $i^{ieme}$  *longitude* de  $\sigma \bmod F_n$ .

Rappelons que, si on note  $P(n)$  l'anneau des séries entières formelles en les variables non-commutatives  $X_1, \dots, X_n$ , l'expansion de Magnus [MKS] est l'homomorphisme de groupes  $F = F(n) \longrightarrow P(n)$  qui envoie chaque générateur  $x_i$  de  $F$  sur  $1 + X_i$ .

**Définition 4.12.** Le  $\mu$ -invariant de Milnor de longueur  $l$ ,  $\mu_{i_1 \dots i_l}$  d'un string-link  $\sigma$  est le coefficient du monôme  $X_{i_1} \dots X_{i_{l-1}}$  dans l'expansion de Magnus de la longitude  $\lambda_{i_l}$  de  $\sigma$  vue dans  $F/F_n$  pour un certain  $n \geq l$ .

Par exemple, les invariants de Milnor de longueur 2, les  $\mu_{ij}$ , sont juste les nombres d'enlacement des composantes  $i$  et  $j$ . Les invariants de Milnor de longueur 3, aussi appelés *triples nombres de Milnor*, peuvent être vus de la façon suivante : si  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) est une surface de Seifert pour la fermeture  $\hat{\sigma}_i$  de  $\sigma_i$ ,<sup>17</sup>  $S_1 \cap S_2 \cap S_3$  est constitué de points, avec un signe associé à l'orientation du repère  $(n_1, n_2, n_3)$  donné par les normales aux surfaces. Alors,  $\mu_{123}(\sigma)$  est la somme de ces signes sur l'ensemble des points de  $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ .

---

<sup>17</sup>Il faut supposer que l'entrelacs à trois composantes  $\hat{\sigma}_1 \cup \hat{\sigma}_2 \cup \hat{\sigma}_3$  est tel que tous ses nombres d'enlacement sont nuls.

**Invariants de Milnor et  $Y_2$ -équivalence.** On sait que, dans  $\mathcal{SL}^{hb}(n)$ , les triples nombres de Milnor ne sont pas additifs sous l'opération d'empilement : le défaut d'homomorphisme est donné par les nombres de Milnor de longueur 2 (voir [Me, Lem. 2]). Puisque ces derniers sont tous nuls dans  $\mathcal{SL}_1^{hb}(n)$ , on peut définir, pour tout triple  $i < j < k \in \{1, \dots, n\}$ , l'homomorphisme de monoïdes

$$\mu_{ijk} : \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \rightarrow \mathbf{Z}$$

induit par le triple nombre de Milnor  $\mu_{ijk}$ . Le lemme 4.14, qui est juste une version du lemme 3.10 pour les string-links framés des boules d'homologie (prouvé d'une manière complètement similaire), nous permet d'énoncer la proposition-définition suivante.

**Proposition 4.13.** *Pour tout triple  $i < j < k \in \{1, \dots, n\}$ , on a un homomorphisme de groupes abéliens bien défini*

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\mu_{ijk}} \mathbf{Z}$$

donné par le triple nombre de Milnor.

**Lemme 4.14.** *Soit  $(M, \sigma)$  un string-link dans une boule d'homologie. Soit  $G$  un clasper de  $Y$ -degré 2 acceptable pour  $(M, \sigma)$  et soit  $M_G^\sigma$  le résultat de la chirurgie le long de  $G$  sur le complémentaire  $M^\sigma$  de  $\sigma$  dans  $M$ . Alors, il existe un isomorphisme*

$$\frac{\pi_1(M^\sigma)}{(\pi_1(M^\sigma))_3} \xrightarrow{\simeq} \frac{(\pi_1(M_G^\sigma))}{((\pi_1(M_G^\sigma)))_3}$$

compatible avec les inclusions  $i_\varepsilon$  ;  $\varepsilon = 0, 1$ .

Rappelons juste ici que l'isomorphisme est obtenu par un argument du type Van Kampen, en voyant  $M_G^\sigma$  comme

$$M_G^\sigma \cong M^\sigma \setminus N(G) \cup_{j|_\partial} (H_4)_L,$$

où  $j : H_4 \hookrightarrow N(G)$  est un plongement orienté du corps en anses de genre 4 sur un voisinage régulier  $N(G)$  de  $G$ , et où  $L$  est un entrelacs tel que la chirurgie le long de  $L$  induit l'identité au niveau de  $\pi_1(\Sigma_4, *) / \pi_1(\Sigma_4, *)_3$ . En particulier les longueurs de  $\sigma$ , vivant dans un voisinage des cordes, peuvent être supposées disjointes de  $N(G)$ , et sont envoyées sur les longueurs de  $\sigma_G$  :  $\lambda_l^{(n)} \in \frac{\pi_1(M^\sigma)}{(\pi_1(M^\sigma))_3}$ , la  $l^{ieme}$  longueur de  $(M, \sigma)$ , est envoyée sur la  $l^{ieme}$  longueur de  $(M_G, \sigma_G)$ , vue dans  $\frac{(\pi_1(M_G^\sigma))}{((\pi_1(M_G^\sigma)))_3}$ . Ainsi,  $\mu_{ijk}(M, \sigma)$ , qui est par définition le coefficient de  $X_i X_j$  dans l'expansion de Magnus de  $(i_1)_3^{-1} (\lambda_l^{(n)}) \in F/F_3$ , coïncide avec  $\mu_{ijk}(M_G, \sigma_G)$ .

### 4.3 Caractérisation de la $Y_2$ -équivalence pour les string-links

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 2.15 annoncé dans §2.2.2.

On rappelle de §3.1.2 et §4.1 qu'il existe un espace de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P)$ , un isomorphisme de groupes abéliens  $\rho : \mathcal{A}_1(P) \rightarrow \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)}$ , et une application de chirurgie surjective  $\phi : \mathcal{A}_1(P) \rightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$ . Rappelons de plus de §2.2 que les applications surjectives

$$P \xrightarrow{p} (H, 0) \quad \text{et} \quad P \xrightarrow{e} (B^{(1)}, \bar{1})$$

sont les projections canoniques du pullback de groupes abéliens spéciaux

$$P = (H, 0) \times_{(H_{(2)}, 0)} (B^{(1)}, \bar{1}).$$

On considère la base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $H$  induite par les courbes  $h_1, \dots, h_n$  de  $\Sigma_{0,n+1}$  de la figure 29.

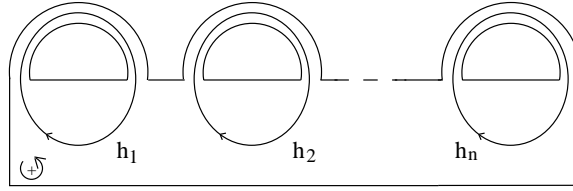


FIG. 29 – Les courbes  $h_1, \dots, h_n$  sur la surface  $\Sigma_{0,n+1}$ .

Soit l'application

$$\tau : \mathcal{SL}_1^{hb}(n) \rightarrow B^{(3)}$$

définie, pour tout string-link  $(M, \sigma)$  dans une boule d'homologie  $M$ , par

$$\begin{aligned} \tau(M, \sigma) = & \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu_{ijk}^{(2)}(M, \sigma) \cdot \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij}^{(2)}(M, \sigma) \cdot \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(M, \sigma) \cdot \bar{e}_i + R(M) \cdot \bar{1} \end{aligned}$$

Ici,  $\mu_{ijk}^{(2)}$  désigne la réduction modulo 2 du triple nombre de Milnor  $\mu_{ijk}$ , et pour tout  $h \in H$ ,  $\bar{h}$  désigne comme dans §2.1.3 l'élément de  $B^{(1)}$  qui envoie toute structure spinorielle  $\sigma \in \text{Spin}(\Sigma_{0,n+1})$  sur  $\langle \sigma, \bar{h} \rangle$ . D'après les Propositions 4.3, 4.6, 4.10 et 4.13, cette application (bien définie!) se factorise en un homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\tau} B^{(3)}.$$

**Lemme 4.15.** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \\
 & \searrow \mathcal{A}_1(e) & \downarrow \tau \\
 & & \mathcal{A}_1(B^{(1)}, \overline{1}) \simeq B^{(3)}.
 \end{array}$$

*Démonstration.* Vérifions que  $\tau(\phi(Y)) = \mathcal{A}_1(e)(Y)$  pour un générateur quelconque  $Y = Y[z_1, z_2, z_3]$  de  $\mathcal{A}_1(P)$ . Comme on l'a dit dans la remarque 3.4,  $P$  est engendré par  $(0, \overline{1})$  et les  $(e_i, \overline{e_i})$ ;  $i = 1, \dots, n$  :  $\mathcal{A}_1(P)$  est donc engendré (d'après la relation Glissement) par  $Y_{1,1,1} := Y[(0, \overline{1}), (0, \overline{1}), (0, \overline{1})]$  et les  $Y_{i,j,k} := Y[(e_i, \overline{e_i}), (e_j, \overline{e_j}), (e_k, \overline{e_k})]$ ;  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ .

Dans le cas où  $Y = Y_{1,1,1}$ , on a  $\forall r \neq s \neq t \in \{1, \dots, n\}$

$$\mu_{rst}(M[1, 1, 1]) = \beta_{rs}^{(2)}(M[1, 1, 1]) = a_s(M[1, 1, 1]) = 0,$$

$$\text{et } R(M[1, 1, 1]) = 1.$$

On a donc  $\tau(Y_{1,1,1}) = \overline{1}$ , qui correspond à  $\mathcal{A}_1(e)(Y_{1,1,1})$  par l'isomorphisme  $\gamma$  du lemme 3.8.

Si  $Y = Y_{i,j,k}$  pour un certain triplet  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ , il suit de §4.1 que l'on peut choisir  $\phi(Y) = (1_{D^2}, 1_n)_{G_{i,j,k}} \in \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$  tel que  $G_{i,j,k}$  est un clasper dont les côtés sont plongés de façon arbitraire, et dont les feuilles sont des méridiens 0-framés des  $i^{ieme}$ ,  $j^{ieme}$  et  $k^{ieme}$  cordes de  $1_n$ . Si  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker, on a alors :

- Si  $i < j < k$ , on est dans le cas de la figure 30(a) :

$$\mu_{rst}(M[e_i, e_j, e_k]) = \delta_{(r,s,t),(i,j,k)}, \text{ et}$$

$$\beta_{rs}^{(2)}(M[e_i, e_j, e_k]) = a_r(M[e_i, e_j, e_k]) = R(M[e_i, e_j, e_k]) = 0, \forall (r, s).$$

Il suit que  $\tau(\phi(Y_{i,j,k})) = \overline{e_i} \cdot \overline{e_j} \cdot \overline{e_k}$ , qui correspond à  $\mathcal{A}_1(e)(Y_{i,j,k})$  par  $\gamma$ .

- Si  $i = j < k$  (ou, de même, si  $i = j < k$ ), on est dans le cas de la figure 30(b) :

$$\beta_{rs}^{(2)}(M[e_i, e_i, e_k]) = \delta_{(r,s),(i,k)}, \text{ et}$$

$$\mu_{rst}(M[e_i, e_i, e_k]) = a_r(M[e_i, e_i, e_k]) = R(M[e_i, e_i, e_k]) = 0, \forall (r, s, t).$$

D'où  $\tau(\phi(Y_{i,j,k})) = \overline{e_i} \cdot \overline{e_j} = \mathcal{A}_1(e)(Y_{i,j,k}) \in B^{(3)}$ .

- Si  $i = j = k$  : cas de la figure 30(c) :

$$a_r(M[e_i, e_i, e_i]) = \delta_{r,i}, \text{ et}$$

$$\mu_{rst}(M[e_i, e_i, e_i]) = \beta_{rs}^{(2)}(M[e_i, e_i, e_i]) = R(M[e_i, e_i, e_i]) = 0, \forall (r, s, t).$$

On a alors bien  $\tau(\phi(Y_{i,j,k})) = \overline{e_i} = \mathcal{A}_1(e)(Y_{i,j,k}) \in B^{(3)}$ .

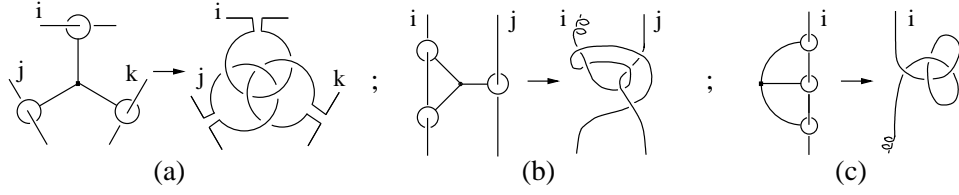


FIG. 30 –

On a ainsi prouvé que  $\tau \circ \phi = \mathcal{A}_1(e)$ .  $\square$

D'après la propositions 4.3, on définit de plus un homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \xrightarrow{\mu_3} \Lambda^3 H.$$

en posant  $\mu_3(M, \sigma) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu_{ijk}(M, \sigma). e_i \wedge e_j \wedge e_k$ . Le lemme suivant est alors une conséquence des calculs effectués dans la preuve de lemme 4.15 ci-dessus.

**Lemme 4.16.** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \\ & \searrow & \downarrow \mu_3 \\ & \mathcal{A}_1(p) & \downarrow \\ & & \mathcal{A}_1(H, 0). \end{array}$$

Les lemmes 4.16 et 4.15 peuvent se résumer dans la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{(hb)}(n) \\ & \searrow \rho \simeq & \downarrow (\mu_3, \tau) \\ & & \Lambda^3 H \times_{\Lambda^3 H_{(2)}} B^{(3)}. \end{array}$$

Il suit que  $\phi$  est injective, et donc c'est un isomorphisme : il en est donc de même pour  $(\mu_3, \tau)$ .

La preuve du corollaire 2.17 est strictement identique à celle de Cor. 2.8, §3.2.3.

#### 4.4 Milnor, Johnson, Birman-Craggs et les autres

Dans cette section, on prouve le théorème 2.16 sur la correspondance entre les cylindres d'homologie sur  $\Sigma_{g,1}$  et les string-links framés à  $2g$  cordes



des boules d'homologie. Rappelons de [Ha1] la construction sur laquelle repose cette correspondance.<sup>18</sup>

On note  $\mathcal{B}_{g,1} := \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$  la base de  $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$  induite par les courbes  $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$  sur  $\Sigma_{g,1}$ , et  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$  la décomposition en anses de  $\Sigma_{g,1}$  associée à ces courbes (voir Fig. 31 ci-dessous). De même,

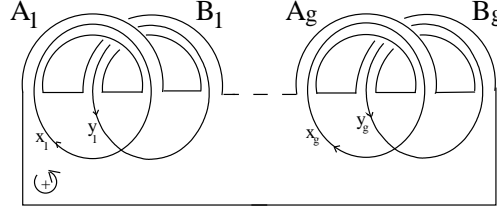


FIG. 31 – Les courbes  $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$  sur la surface  $\Sigma_{g,1}$  décomposée en anses  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ .

$\mathcal{B}_{0,2g+1} := \{e_1, \dots, e_{2g}\}$  désigne comme dans §4.3 la base de  $H_1(\Sigma_{0,2g+1}, \mathbf{Z})$  induite par les courbes  $h_i$  de la figure ci-dessous, et on a une décomposition en anses  $\{A'_i, B'_i\}_{i=1}^g$  de  $\Sigma_{0,2g+1}$ .

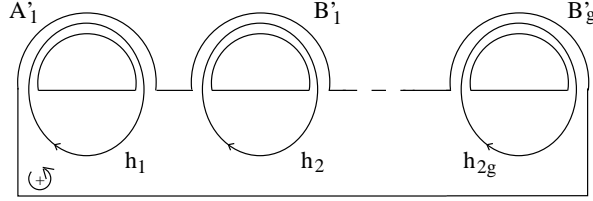


FIG. 32 – Les courbes  $h_1, \dots, h_{2g}$  sur le disque à  $2g$  trous décomposé en anses  $A'_1, B'_1, \dots, A'_g, B'_g$ .

On identifie  $\Sigma_{g,1} \times I$  avec  $\Sigma_{0,2g+1} \times I$  par le difféomorphisme  $F$  réalisé par les  $g$  isotopies échangeant la seconde zone d'attachement de la anse  $A_i \times I$  et la première zone d'attachement de la anse  $B_i \times I$ . Soit  $G$  un graphe de claspers acceptable dans  $\Sigma_{g,1} \times I$  : lorsque l'on applique  $F$  à la paire  $(\Sigma_{g,1} \times I, G)$ , on obtient un graphe de clasper acceptable  $G'$  dans  $\Sigma_{0,2g+1} \times I$ .

Maintenant,  $\Sigma_{0,2g+1} \times I$  peut être vu comme l'adhérence du complémentaire dans  $D^2 \times I$  du string-link à  $2g$  cordes 0-framées  $1_{2g}$  :  $G'$  est alors vu comme un clasper acceptable pour  $1_{2g}$  dans  $D^2 \times I$ .

Ceci définit une bijection entre  $\mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1})$  et  $\mathcal{SL}_1^{hb}(2g)$ , qui clairement induit une bijection entre  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1})$  et  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g)$ . En effet, le degré d'un clasper n'est pas changé par le difféomorphisme  $F$ .

Cette bijection n'est pas *a priori* un homomorphisme. Cependant, on peut

<sup>18</sup>Cette construction figure aussi dans §2.3.2, puisqu'elle intervient dans la démonstration de la proposition 2.3.

faire l'observation suivante :

Soit  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) un élément de  $\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1})$  obtenu de  $\Sigma_{g,1} \times I$  par chirurgie le long du  $Y$ -graphe  $G_i$ ;  $M_i$  est envoyé par le difféomorphisme  $F$  sur  $(1_{D^2}, 1_{2g})_{G'_i}$ , où  $G'_i$  est un  $Y$ -graphe. L'image du produit  $M_1 \cdot M_2$  est donc obtenu de  $(1_{D^2}, 1_{2g})$  par chirurgie sur l'union des  $Y$ -graphes  $G'_1$  et  $G'_2$ . Mais on peut supposer que ces  $Y$ -graphes sont *dans des portions disjointes de*  $D^2 \times I$  : cela est réalisé au prix de changements de croisements (Lemmes 1.38 à 1.40) qui ne changent pas la classe de  $Y_2$ -équivalence de  $(1_{D^2}, 1_{2g})_{G'_1 \cup G'_2}$ . On a donc  $M_1 \cdot M_2 \sim_{Y_2} (1_{D^2}, 1_{2g})_{G'_1} \cdot (1_{D^2}, 1_{2g})_{G'_2}$ .

La bijection  $b$  produit donc un isomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) \xrightarrow{b} \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g).$$

**Remarque 4.17.** De même, on observe que la bijection  $b$  entre  $\mathcal{C}_1(\Sigma_{g,1})$  et  $\mathcal{SL}_1^{hb}(2g)$  produit un isomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{C}}_k(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_k^{hb}(2g),$$

pour tout  $k \geq 1$ .

Notons qu'un inverse est donné par les  $g$  isotopies échangeant la seconde zone d'attachement de la anse  $A'_i \times I$  et la première zone d'attachement de la anse  $B'_i \times I$ , c'est-à-dire par la construction inverse de celle donnée ci-dessus.

Le difféomorphisme  $F$  induit par ailleurs un isomorphisme  $f$  entre  $H_{g,1} = H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$  et  $H_{0,2g+1} = H_1(\Sigma_{0,2g+1}, \mathbf{Z})$ . Plus précisément,  $f$  est donné par l'assignation

$$x_i \mapsto e_{2i-1} \quad \text{et} \quad y_i \mapsto e_{2i}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, g.$$

De même,  $F$  nous permet d'identifier  $\text{Spin}(\Sigma_{g,1} \times I) \simeq \text{Spin}(\Sigma_{g,1})$  avec  $\text{Spin}(\Sigma_{0,2g+1} \times I) \simeq \text{Spin}(\Sigma_{0,2g+1})$ . Il suit que  $B_{g,1}^{(1)}$  s'identifie à  $B_{0,2g+1}^{(1)}$ , et donc  $B_{g,1}^{(k)} \simeq B_{0,2g+1}^{(k)}$ , pour tout  $k \geq 1$ . Plus précisément, l'isomorphisme  $B_{g,1}^{(3)} \simeq B_{0,2g+1}^{(3)}$  peut être vu de la façon suivante : étant données les bases  $\mathcal{B}_{g,1}$  et  $\mathcal{B}_{0,2g+1}$  pour  $H_{g,1}$  et  $H_{0,2g+1}$ , on a les isomorphismes (non canoniques)  $B^{(3)} \simeq \Lambda^3 H_{(2)} \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$  (voir lemme 3.8). On identifie alors  $B_{g,1}^{(3)}$  et  $B_{0,2g+1}^{(3)}$  termes à termes (au sens de cette décomposition) par l'isomorphisme  $f : H_{g,1} \longrightarrow H_{0,2g+1}$ .

Puisque les espaces de diagrammes  $\mathcal{A}_1(P)$  s'identifient avec le pullback  $\Lambda^3 H \times_{\Lambda^3(H)_{(2)}} B^{(3)}$ , on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(P_{g,1}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_1(P_{0,2g+1}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \overline{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xrightarrow{b} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g), \end{array} \quad (D)$$

dont toutes les flèches sont des isomorphismes.

En considérant les applications inverses (au sens des théorèmes 2.6 et 2.15) des flèches verticales de ce diagrammes, on en déduit immédiatement le diagrammes commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xrightarrow{b} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g) \\
(\eta_1, \beta) \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow (\mu_3, \tau) \\
\Lambda^3 H_{g,1} \times \Lambda^3 (H_{g,1})_{(2)} B_{g,1}^{(3)} & \xrightarrow{\simeq} & \Lambda^3 H_{0,2g+1} \times \Lambda^3 (H_{0,2g+1})_{(2)} B_{0,2g+1}^{(3)},
\end{array}$$

qui illustre la correspondance, *via* l'isomorphisme  $b$ , entre les invariants de type fini de degré 1 pour les cylindres d'homologie sur  $\Sigma_{g,1}$  et les string-links à  $2g$  cordes des boules d'homologie.

Plus précisément, si on considère dans le diagramme  $(D)$  les projections  $\mathcal{A}_1(p) : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \Lambda^3 H$  (respectivement  $\mathcal{A}_1(e) : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow B^{(3)}$ ), alors on déduit des lemmes 3.16 et 4.16, d'une part, et 3.17 et 4.15 d'autre part, les deux diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xrightarrow{b} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g) \\
\eta_1 \searrow & & \downarrow \mu_3 \\
& & \Lambda^3 H_{g,1} \simeq \Lambda^3 H_{0,2g+1}
\end{array}
\quad ; \quad
\begin{array}{ccc}
\bar{\mathcal{C}}_1(\Sigma_{g,1}) & \xrightarrow{b} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(2g) \\
\beta \searrow & & \downarrow \tau \\
& & B_{g,1}^{(3)} \simeq B_{0,2g+1}^{(3)}.
\end{array}$$

Le premier retrouve la correspondance Milnor-Johnson de [Ha1, Thm. 2.1], en plus bas degré. Le second complète cette analogie entre cylindres d'homologie et string-links, en établissant une correspondance entre les homomorphismes de Birman-Craggs  $\beta$  et l'homomorphisme  $\tau$  du théorème 2.15 (induit par les invariants de Milnor, Sato-Levine, Arf et Rochlin).

## 5 $C$ -filtration pour les string-links

Dans ce chapitre, nous étudions le cas des string-links ‘classiques’ dans  $D^2 \times I$ . Rappelons que  $\mathcal{SL}(n)$  désigne le monoïde des (classes d’isotopie ambiante par rapport au bord des) string-links à  $n$  cordes.

### 5.1 Invariants de Vassiliev des string-links

Commençons par rapeller quelques généralités sur les invariants de Vassiliev des string-links à  $n$  cordes.

Soit  $A$  un groupe abélien, et  $f : \mathcal{SL}(n) \rightarrow A$  un invariant des string-links à  $n$  cordes. Si  $\mathcal{SL}^{[k]}(n)$  désigne l’ensemble des (classes d’isotopies des) string-links à  $n$  cordes avec  $k$  points singuliers, alors  $f$  peut être étendu à un invariant  $f^{(k)} : \mathcal{SL}^{[k]}(n) \rightarrow A$  en posant  $f = f^{(0)}$  et la relation de récurrence

$$f^{(k+1)}(\text{X}) = f^{(k)}(\text{X}) - f^{(k)}(\text{X}).$$

$f^{(k)}$  est appelée la  $k^{\text{ième}}$  dérivée de  $f$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{SL}^{[k]}(n)$  un string-link à  $n$  cordes avec  $k$  points doubles. L’ensemble des préimages des points doubles de  $\sigma$  (les points doubles à la source) est un sous ensemble formé de  $k$  paires de points de  $\bigsqcup_{i=1}^n I_i$ . Ici,  $\bigsqcup_{i=1}^n I_i$  désigne l’union disjointe de  $n$  copies orientées de l’intervalle unité  $I = [0, 1]$ . Un *diagramme de cordes d’ordre  $k$*  est la donnée de  $\bigsqcup_{i=1}^n I_i$  muni d’une telle collection de  $k$  paires de points reliés par une corde (dans le cas des entre-lacs, ces diagrammes sont des copies de  $S^1$  reliées par des cordes). Ici, on représentera les copies de  $I$  (que l’on appellera les *brins* du diagramme) par un trait épais et les cordes par un trait fin (elles sont parfois représentées par des pointillés dans la littérature). On note  $\mathcal{D}_k^n$  l’ensemble des diagrammes de cordes d’ordre  $k$ , considérés à difféomorphisme préservant l’orientation des copies de  $I$  près.

**Exemple 5.1.**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^1 &= \left\{ \text{↑} \right\} \quad ; \quad \mathcal{D}_1^2 = \left\{ \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↓} \quad ; \quad \text{↑↑} \right\} ; \\ \mathcal{D}_2^1 &= \left\{ \text{↑} \quad ; \quad \text{↑} \quad ; \quad \text{↑} \right\} ; \\ \mathcal{D}_2^2 &= \left\{ \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \right. \\ &\quad \left. \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \quad ; \quad \text{↑↑} \right\}. \end{aligned}$$

**Définition 5.2.** On appelle *système de poids d’ordre  $k$*  toute application  $W : \mathcal{D}_k^n \rightarrow A$ , où  $A$  est un groupe abélien et  $n \geq 1$ , compatible avec les relations (1T) et (4T) (pour ‘1 terme’ et ‘4 termes’ respectivement) de la figure 33.

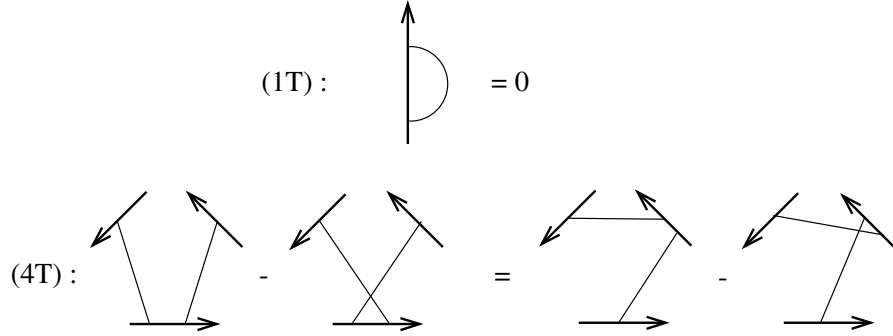


FIG. 33 – Les relations (1T) et (4T).

Dans cette figure,  $\uparrow$  représente une corde isolée, disjointe des  $(k - 1)$  autres cordes du diagramme. Pour (4T), chaque diagramme est identique, sauf dans une petite boule où 2 de leurs  $k$  cordes sont comme représenté : on appelle respectivement  $N$ ,  $S$ ,  $W$  et  $E$  ces quatres diagrammes (voir [BN1, p. 5]). Notons que pour  $n = 2$ , la relation (4T) devient :

$$\uparrow\uparrow = \uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow = \uparrow\uparrow.$$

L'extension  $f^{(k)}$  d'un invariant  $f$  des string-links à  $n$  cordes est compatible avec les relations (1T) et (4T) :

$$f^{(k)}(\uparrow) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(k)}(N) - f^{(k)}(S) = f^{(k)}(W) - f^{(k)}(E).$$

**Définition 5.3.** Un invariant  $f : \mathcal{SL}(n) \rightarrow A$  des string-links à  $n$  cordes est un *invariant de Vassiliev de type  $k$*  si  $f^{(k+1)} = 0$ , c'est-à-dire si  $f$  s'annule sur tout string-link avec strictement plus de  $k$  points doubles.

### 5.1.1 L'invariant de Casson $c_2$

Soit  $L$  un entrelacs (non-orienté), et  $S$  une surface de Seifert connexe pour  $L$  : pour une base de  $H_1(S)$  donnée, on note  $M$  la matrice de Seifert associée. Alors le déterminant  $\det(xM - x^{-1}M^T)$  est un polynôme à coefficients entiers en la variable  $z = x - x^{-1}$ , noté  $\nabla_L(z)$  : le *polynôme de Conway* [Ka]. C'est un invariant des entrelacs, et il vérifie la relation Skein suivante :

$$\nabla_{\nearrow\searrow}(z) - \nabla_{\nwarrow\swarrow}(z) = z\nabla_{\searrow\swarrow}(z),$$

où  $\nearrow\searrow$ ,  $\nwarrow\swarrow$  et  $\searrow\swarrow$  sont des entrelacs identiques en dehors d'une petite boule dans laquelle ils sont comme représentés. On a  $\nabla_{\text{noeud trivial}} = 1$ , et donc  $\nabla_L = 0$  pour  $L$  un entrelacs trivial à  $k > 1$  composantes.

Dans le cas où  $L$  est un nœud, le polynôme de Conway est de la forme

$$\nabla_L(z) = 1 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots$$

Le coefficient  $c_2$  est appelé *invariant de Casson du nœud  $L$* .

Pour un string-link  $\sigma$  à  $n$  brins, on peut encore définir une notion d'invariant de Casson. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on appelle  *$i^{\text{ieme}}$  invariant de Casson de  $\sigma$* , noté  $(c_2)_i(\sigma)$ , l'invariant de Casson de la fermeture de la  $i^{\text{ieme}}$  corde de  $\sigma$  :

$$(c_2)_i(\sigma) := c_2(\hat{\sigma}_i).$$

**Invariant de Casson et  $C_3$ -équivalence.** Etant le coefficient de  $z^2$  du polynôme de Conway, l'invariant de Casson  $c_2$  des nœuds est un invariant de Vassiliev de type 2 [BN1, Thm. 2], et est par conséquent invariant sous  $C_3$ -chirurgie (Thm. 1.27 ; voir aussi [H, Prop. 7.1]).

Ainsi, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  la restriction de  $(c_2)_i$  à  $\mathcal{SL}_2(n)$  se factorise par la projection  $\mathcal{SL}_2(n) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  pour donner un homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{SL}}_2(n) \xrightarrow{(c_2)_i} \mathbf{Z}.$$

**Formule de type Lannes pour l'invariant de Casson.** Soit  $\sigma$  un string-link à une corde. A tout croisement  $x$  de  $\sigma$ , on associe les deux quantités  $\epsilon_x \in \{-1; +1\}$  et  $\delta_x \in \{0; 1\}$  définies comme suit :

- $\epsilon_x$  désigne le signe du croisement. Autrement dit,  $\epsilon_x = +1$  si  $x = \nearrow \searrow$ ,  
et  $\epsilon_x = -1$  si  $x = \nwarrow \searrow$ ,
- $\delta_x = 0$  si le premier des deux brins se croisant (en suivant l'orientation) passe au dessus du second, et  $\delta_x = 1$  sinon.

Soit  $W_2^1 : \mathcal{D}_2^1 \rightarrow \mathbf{Z}$  le système de poids défini par

$$W_2^1(\textcircled{\uparrow}) = W_2^1(\textcircled{\downarrow}) = 0 \text{ et } W_2^1(\textcircled{\circ}) = 1.$$

$W_2^1$  permet d'établir une formule pour l'invariant de Casson  $c_2$  d'un string-link  $\sigma$  à une corde, qui est à rapprocher de la formule de J. Lannes pour les invariants de Vassiliev de degré 2 des nœuds (voir [La, §4.2] et [T, §7.1]).

$$c_2(\sigma) = 1/2 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)} W_2^1(D_{x,y}) \epsilon_x \epsilon_y |\delta_x - \delta_y|,$$

où  $\mathcal{P}_2(\sigma)$  désigne l'ensemble des parties à deux éléments (non-ordonnés) de l'ensemble des croisements (d'un diagramme) de  $\sigma$  : à tout élément  $\{x, y\}$  de  $\mathcal{P}_2(\sigma)$ , on associe un diagramme  $D_{x,y}$  de  $\mathcal{D}_2^1$  en considérant le string-link singulier obtenu en remplaçant  $x$  et  $y$  par des points doubles.

Ce type de formule est similaire aux formules de diagrammes de Gauss, introduites (indépendamment) par T. Fiedler [FS, F] et par M. Polyak et O. Viro [PV].

### 5.1.2 Invariant de Vassiliev de degré 2 pour les string-links à deux cordes

On définit un système de poids  $W_2^2 : \mathcal{D}_2^2 \rightarrow \mathbf{Z}$  symétrique (*i.e.*  $W_2^2$  ne distingue pas un diagramme de  $\mathcal{D}_2^2$  de son image miroir) en posant :

$$W_2^2(\uparrow\uparrow) = W_2^2(\uparrow\downarrow) = W_2^2(\downarrow\uparrow) = W_2^2(\downarrow\downarrow) = W_2^2(\uparrow\uparrow) = W_2^2(\uparrow\downarrow) = 0 \quad (15)$$

$$W_2^2(\uparrow\uparrow) = 0 \quad ; \quad W_2^2(\uparrow\downarrow) = 1 \quad ; \quad W_2^2(\downarrow\uparrow) = -1. \quad (16)$$

On remarque en particulier que  $W_2^2(\uparrow\downarrow) = W_2^2(\uparrow\uparrow) - W_2^2(\downarrow\uparrow)$  : la relation  $(4T)$  est bien vérifiée.

On introduit à présent la notion de raccordement d'un string-link.

**Définition 5.4.** Soit  $\sigma \in \mathcal{SL}(n)$  un string-link à  $n$  cordes. On appelle *raccordement* de  $\sigma$ , noté  $r(\sigma)$  l'élément de  $\mathcal{SL}(1)$  obtenu en attachant, pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , l'extrémité de la  $i^{ieme}$  corde à l'origine de la  $(i+1)^{ieme}$ , de telle sorte que les 'boucles' de  $r(\sigma)$  passent successivement *au dessus* du premier brin de  $\sigma$  (produisant  $n-1$  croisements positifs supplémentaires).

Un exemple est donné dans la figure 34.

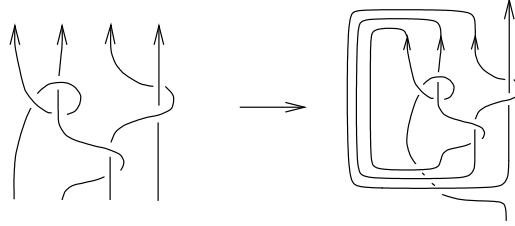


FIG. 34 – Le raccordement d'un string-link à 4 cordes.

**Définition 5.5.** Soit un diagramme  $\sigma$  de string-link à deux cordes. Un croisement  $x$  de cette projection sera dit *de type 1* si les deux brins se croisant en  $x$  appartiennent à la même corde ; sinon,  $x$  est un *croisement de type 2*.

A tout croisement  $x$ , on associe deux quantités  $\epsilon_x \in \{-1; +1\}$  et  $\delta_x \in \{0; 1\}$  comme suit :

- $\epsilon_x$  désigne le signe du croisement.
- 

$$\delta_x = \begin{cases} 0 & \text{si, dans le raccordement } r(\sigma) \text{ de } \sigma, \text{ le premier des deux} \\ & \text{brins se croisant en } x \text{ (en suivant l'orientation) passe au} \\ & \text{dessus du second,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, si  $x$  est de type 2,  $\delta_x = 0$  si la première corde passe au dessus de la seconde, et  $\delta_x = 1$  sinon. Si  $x$  est de type 1,  $\delta_x = 0$  si le premier brin (en suivant l'orientation) passe au dessus, et  $\delta_x = 1$  sinon.

On définit une application  $V_2 : \mathcal{SL}(2) \rightarrow \mathbf{Q}$  par :

$$V_2(\sigma) = 1/2 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)} W_2^2(D_{x,y}) \epsilon_x \epsilon_y |\delta_x - \delta_y|.$$

Un exemple de calcul est donné à la fin de cette section.

*Notations 5.6.* Pour tout  $\{x, y\}$  de  $\mathcal{P}_2(\sigma)$ , on note

$$\Delta_{x,y} = |\delta_x - \delta_y| \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = W_2^2(D_{x,y}) \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y}.$$

**Théorème 5.7.**  $V_2$  est un invariant de Vassiliev de degré 2 des string-links à deux cordes.

*Démonstration.* Le fait que  $V_2$  est bien un invariant des string-links à deux cordes (*i.e.* il est inchangé par les trois mouvements de Reidemeister) est une conséquence du lemme 5.11, énoncé plus loin, qui identifie  $V_2(\sigma)$  à l'invariant de Casson d'un certain nœud construit à partir de  $\sigma$  (corrigé par l'invariant de Casson des deux composantes). Pour une preuve directe de ce fait, utilisant seulement la définition de  $V_2$ , le lecteur est renvoyé à l'annexe A.

Il reste à montrer  $V_2$  est un invariant de Vassiliev de degré 2, c'est-à-dire que la troisième dérivée  $V_2^{(3)} : \mathcal{SL}^{[3]}(2) \rightarrow \mathbf{Q}$  est nulle.

Soit  $V_2^{(1)} : \mathcal{SL}^{[1]}(2) \rightarrow \mathbf{Q}$  définie par

$$V_2^{(1)}(\text{\texttt{X}}_{x_0}) = V_2(\text{\texttt{X}}_{x_0^+}) - V_2(\text{\texttt{X}}_{x_0^-}),$$

où  $\text{\texttt{X}}_{x_0}$  désigne un string-link avec un point singulier  $x_0$ , et où  $\text{\texttt{X}}_{x_0^+}$  et  $\text{\texttt{X}}_{x_0^-}$  désignent les string-links obtenus en désingularisant avec un croisement positif et négatif respectivement. Remarquons que, pour tout croisement  $y \neq x_0^\pm$ ,  $D_{x_0^+,y} = D_{x_0^-,y} = D_{x_0,y}$  et que  $\Delta_{x_0^+,y} = (1 - \Delta_{x_0^-,y})$ , puisque  $\delta_{x_0^+} = (1 - \delta_{x_0^-})$ . On vérifie alors facilement que dans tous les cas, c'est-à-dire que  $x_0$  soit de



type 1 ou 2, et où que se situe le croisement dans le string-link, on a

$$\begin{aligned}
V_2^{(1)}(\text{X}_{x_0}) &= \left( 1/2 \sum_{y \neq x_0^+} \lambda(x_0^+, y) + 1/2 \sum_{y, z \neq x_0^+} \lambda(y, z) \right) \\
&\quad - \left( 1/2 \sum_{y \neq x_0^-} \lambda(x_0^-, y) + 1/2 \sum_{y, z \neq x_0^-} \lambda(y, z) \right) \\
&= 1/2 \left( \sum_{y \neq x_0^+} W_2^2(D_{x_0^+, y}) \cdot \epsilon_{x_0^+} \cdot \epsilon_y \cdot \Delta_{x_0^+, y} \right) + 1/2 \sum_{y, z \neq x_0^+} \lambda(y, z) \\
&\quad - 1/2 \left( \sum_{y \neq x_0^-} W_2^2(D_{x_0^-, y}) \cdot \epsilon_{x_0^-} \cdot \epsilon_y \cdot \Delta_{x_0^-, y} \right) - 1/2 \sum_{y, z \neq x_0^-} \lambda(y, z) \\
&= 1/2 \left( \sum_{y \neq x_0} W_2^2(D_{x_0, y}) \cdot \epsilon_y \cdot \Delta_{x_0^+, y} + \sum_{y \neq x_0} W_2^2(D_{x_0, y}) \cdot \epsilon_y \cdot (1 - \Delta_{x_0^+, y}) \right) \\
&= 1/2 \sum_{y \neq x_0} W_2^2(D_{x_0, y}) \cdot \epsilon_y \cdot (\Delta_{x_0^+, y} + 1 - \Delta_{x_0^+, y}) \\
&= 1/2 \sum_{y \neq x_0} W_2^2(D_{x_0, y}) \cdot \epsilon_y.
\end{aligned}$$

Précisons que la notation  $y, z \neq x_0^-$  désigne la somme sur l'ensemble des couples de croisements  $(y, z)$  tels que  $y \neq x_0^-$  et  $z \neq x_0^-$ .

De même, la seconde dérivée de  $V_2$  est donnée par

$$V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}) = V_2^{(1)}(\text{X}_{x_0^+}) - V_2^{(1)}(\text{X}_{x_0^-}),$$

et donc, pour  $(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0})$  un string-link avec deux points singuliers  $x_0$  et  $y_0$  :

$$\begin{aligned}
V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0}) &= V_2^{(1)}(\text{X}_{x_0^+}, \text{X}_{y_0}) - V_2^{(1)}(\text{X}_{x_0^-}, \text{X}_{y_0}) \\
&= 1/2 \left( W_2^2(D_{x_0^+, y_0}) + \sum_{y \neq x_0^+, y_0} W_2^2(D_{y_0, y}) \cdot \epsilon_y \right) \\
&\quad - 1/2 \left( -W_2^2(D_{x_0^-, y_0}) + \sum_{y \neq x_0^-, y_0} W_2^2(D_{y_0, y}) \cdot \epsilon_y \right) \\
&= W_2^2(D_{x_0, y_0}).
\end{aligned}$$

On constate donc que la valeur de  $V_2^{(2)}$  sur un string-link  $\sigma$  à deux points singuliers  $x_0$  et  $y_0$  ne dépend plus que de ces deux points. Il résulte que la

dérivée de  $V_2^{(2)}$  est nulle. En effet :

$$\begin{aligned}
V_2^{(3)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0}, \text{X}_{z_0}) &= V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0}, \text{X}_{z_0}) - V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0}, \text{X}_{z_0}) \\
&= \left( W_2^2(D_{y_0, z_0}) \right) - \left( W_2^2(D_{y_0, z_0}) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 5.8.**  $V_2 : \mathcal{SL}(2) \rightarrow \mathbf{Q}$  est un homomorphisme de monoïdes.

*Démonstration.* Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux string-links à 2 cordes, et  $\sigma \cdot \sigma'$  le string-link obtenu en empilant  $\sigma$  au dessus de  $\sigma'$  (voir §2.2). On a alors

$$\mathcal{P}_2(\sigma \cdot \sigma') = \mathcal{P}_2(\sigma) \cup \mathcal{P}_2(\sigma') \cup \underbrace{\{\{x, y\} / x \in \sigma \text{ et } y \in \sigma'\}}_{\mathcal{P}_{1,1}},$$

d'où

$$V_2(\sigma \cdot \sigma') = V_2(\sigma) + V_2(\sigma') + 1/2 \sum_{\{x, y\} \in \mathcal{P}_{1,1}} \lambda(x, y).$$

Or, les diagrammes de cordes associés aux couples de  $\mathcal{P}_{1,1}$  sont de quatre types :  $\uparrow\uparrow$ ,  $\uparrow\downarrow$ ,  $\downarrow\uparrow$  et  $\downarrow\downarrow$ , pour lesquels le système de poids  $W_2^2$  est nul. Il résulte que  $V_2$  est bien un homomorphisme de monoïdes :  $V_2(\sigma \cdot \sigma') = V_2(\sigma) + V_2(\sigma')$ . □

**Théorème 5.9.**  $V_2$  est à valeurs entières.

*Démonstration.* Commençons par remarquer de la preuve du théorème 5.7 que la seconde dérivée de  $V_2$  est à valeurs entières : pour tout string-link avec deux points singuliers  $(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0})$ , on a vu en effet que  $V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{y_0}) = W_2^2(D_{x_0, y_0}) \in \mathbf{Z}$ . Ceci implique que la première dérivée  $V_2^{(1)}$  prend elle aussi ses valeurs dans  $\mathbf{Z}$ . En effet, considérons un string-link  $\sigma_0 = (\text{X}_{x_0})$  avec un point singulier  $x_0$ .

- Si  $x_0$  est de type 1 (appartenant, disons, à la première corde), alors par une suite de changements de croisement  $\sigma_0 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \dots \mapsto \sigma_n = \sigma_f$  on peut toujours se ramener au string-link singulier  $\sigma_f$  de la partie gauche de la figure 35. Pour chaque tel changement de croisement  $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}$ , les valeurs de  $V_2^{(1)}$  diffèrent par définition de  $V_2^{(2)}(\text{X}_{x_0}, \text{X}_{x_i})$ , où  $\text{X}_{x_i}$  est le point singulier associé au changement de croisement. Ainsi,  $V_2^{(1)}(\sigma_i) - V_2^{(1)}(\sigma_{i+1}) \in \mathbf{Z}$ , et donc  $V_2^{(1)}(\sigma_0) = V_2^{(1)}(\sigma_f) + k$  ; avec  $k \in \mathbf{Z}$ . Or,  $V_2^{(1)}(\sigma_f) = V_2(\sigma_+) - V_2(\sigma_-)$ , où  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  sont représentés dans la partie gauche de la figure 35 :  $V_2$  est nul pour chacun d'eux. Il suit que  $V_2^{(1)}(\sigma_0) \in \mathbf{Z}$ .

- Si  $x_0$  est de type 2, alors par une suite de changements de croisement on peut se ramener au string-link singulier  $\sigma_f$  représenté dans la partie droite de la figure 35, et comme précédemment on a donc  $V_2^{(1)}(\sigma_0) - V_2^{(1)}(\sigma_f) \in \mathbf{Z}$ .  
Mais  $V_2^{(1)}(\sigma_f) = V_2(\sigma_+) - V_2(\sigma_-)$ , où  $\sigma_{\pm}$  est donné dans la partie droite de la figure 35. Clairement,  $V_2(\sigma_+) = 0$ , et  $V_2(\sigma_-) = 1/2 \cdot W_2^2(\uparrow\uparrow) = 0$ .  
D'où  $V_2^{(1)}(\sigma_0) \in \mathbf{Z}$ .

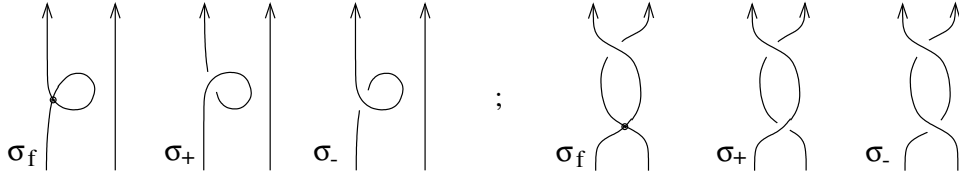


FIG. 35 –

De même, on montre que, pour tout string-link  $\sigma$  à deux cordes,  $V_2(\sigma) \in \mathbf{Z}$  : par une suite de changements de croisements, on peut toujours se ramener au string-link trivial  $1_2$  pour lequel  $V_2$  est nul. La différence  $V_2(\sigma) - V_2(1_2) = V_2(\sigma)$  est une somme de termes du type  $V_2^{(1)}(\sigma_0)$ , donc d'entiers.  $\square$

Une conséquence de Lem. 5.8 et Thm. 5.9 est que  $V_2$  produit un homomorphisme de monoïdes (désigné par la même notation)  $V_2 : \mathcal{SL}_2(2) \longrightarrow \mathbf{Z}$ . Etant un invariant de Vassiliev de degré 2 par Thm. 5.7, il suit alors du théorème 1.27 que  $V_2$  se factorise en l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\overline{\mathcal{SL}}_2(2) \xrightarrow{V_2} \mathbf{Z}.$$

Faisons à présent une observation, qui nous sera utile dans le prochain lemme.

**Remarque 5.10.** Par définition, on a pour tout  $\sigma \in \mathcal{SL}_2(2)$ ,  $V_2(\sigma) = 1/2 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)} W_2^2(D_{x,y}) \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y}$ , et par (15) et (16), cela équivaut à

$$V_2(\sigma) = 1/2 \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma) \\ D_{x,y} = \uparrow\uparrow}} \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y} - 1/2 \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma) \\ D_{x,y} = \uparrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow}} \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y}.$$

On note  $S$  la seconde somme dans cette expression : toute paire  $\{x,y\}$  contribuant à la seconde somme est telle que

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow, \text{ et } \delta_x \neq \delta_y.$$

Supposons par exemple que  $D_{x,y} = \uparrow\downarrow$  avec  $\delta_x = 1$  et  $\delta_y = 0$ . On est alors dans une situation du type Fig. 36(a) - cette figure représentant le cas où

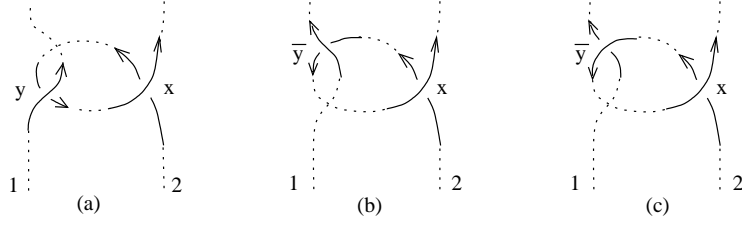


FIG. 36 –

$\epsilon_x = \epsilon_y = +1$ .

Soit  $\gamma_1 = \hat{\sigma}_1$  la courbe fermée orientée du plan donnée par la fermeture de la première corde du string-link, et soit  $\gamma_2$  la courbe fermée orientée du plan formée par la boucle de  $\sigma_2$  en le croisement  $x$ . On vérifie aisément que, pour tout point  $c$  de  $\gamma_1 \cap \gamma_2$ , on a la formule suivante pour le nombre d'intersection  $i_c$  :

$$i_c = \epsilon_c \cdot (-1)^{\delta_c}. \quad (17)$$

Notons  $\mathcal{I}_{1,2}$  l'ensemble des points d'intersections de  $\gamma_1$  avec  $\gamma_2$ , et  $\mathcal{I}_{1,2}^\pm$  le sous-ensemble des éléments  $c$  tels que  $i_c = (\pm 1)$ .

Le nombre d'intersection  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \sum_{c \in \mathcal{I}_{1,2}} i_c$  est nul : à tout élément  $c$  de  $\mathcal{I}_{1,2}^-$ , on peut donc associer (de façon arbitraire) un unique élément  $\bar{c} \in \mathcal{I}_{1,2}^+$ . Dans le contexte de Fig. 36(a),  $y \in \mathcal{I}_{1,2}^-$  ; on considère donc  $\bar{y} \in \mathcal{I}_{1,2}^+$  : la paire  $\{x, \bar{y}\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)$  contribue pour  $S$  ( $D_{x, \bar{y}} = \uparrow\uparrow$ ), et d'après (17) il y a deux possibilités pour que  $i_{\bar{y}} = (+1)$  :

**Cas 1 :**  $\epsilon_{\bar{y}} = -\epsilon_y$  et  $\delta_{\bar{y}} = \delta_y$  - voir Fig.36(b).

**Cas 2 :**  $\epsilon_{\bar{y}} = \epsilon_y$  et  $\delta_{\bar{y}} = 1 - \delta_y$  - voir Fig.36(c).

Ainsi, les termes contribuant à  $S$  viennent *par couples*  $(\{x, y\}; \{x, \bar{y}\})$ , la paire  $(y, \bar{y})$  étant dans un des deux cas ci-dessus.

Nous allons maintenant identifier l'invariant  $V_2$  en termes d'invariants classiques des nœuds. Etant donné un string-link  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  à deux cordes, on appelle *bouclage* de  $\sigma$ , noté  $B_\sigma$ , le nœud basé obtenu en identifiant les extrémités supérieures, d'une part, et inférieures d'autre part, de  $\sigma$ .<sup>19</sup> On munit le nœud ainsi obtenu de l'orientation induite par la corde  $\sigma_1$  (qui est l'inverse de celle induite par  $\sigma_2$ ), le point base de  $B_\sigma$  étant donné par les extrémités inférieures des cordes. Un exemple est donné dans la figure 37.

**Lemme 5.11.** *Soit  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  un string-link à deux cordes. Alors, l'invariant  $V_2$  de  $\sigma$  est donné par la formule :*

$$V_2(\sigma) = c_2(b(\sigma)) - c_2(\sigma_1) - c_2(\sigma_2).$$

*Démonstration.* Pour tout croisement  $x$  de  $\sigma$ , on note le croisement associé de  $B_\sigma$  par une majuscule :  $X \in \mathcal{P}(B_\sigma)$ . On constate que :

<sup>19</sup>Cette construction est connue dans la littérature sous le nom de *plate*.

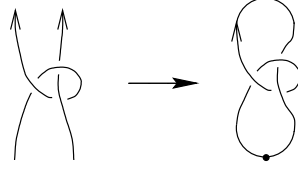


FIG. 37 – Le bouclage d'un string-link à deux cordes.

- Si  $x$  est de type 1, appartenant à  $\sigma_1$ , on a  $\epsilon_X = \epsilon_x$  et  $\delta_X = \delta_x$ .
- Si  $x$  est de type 1, appartenant à  $\sigma_2$ , on a  $\epsilon_X = \epsilon_x$  et  $\delta_X = (1 - \delta_x)$ .
- Si  $x$  est de type 2, on a  $\epsilon_X = -\epsilon_x$  et  $\delta_X = \delta_x$ .

Calculons l'invariant de Casson de  $B_\sigma$ , c'est-à-dire l'invariant de Casson du string-link à une corde obtenu en coupant  $B_\sigma$  au niveau du point base.

$$\begin{aligned} c_2(B_\sigma) &= 1/2 \sum_{\{X,Y\} \in \mathcal{P}_2(B_\sigma)} W_2^1(D_{X,Y}) \epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y}, \\ &= 1/2 \sum_{\{X,Y\} \in \mathcal{P}_2(B_\sigma)/D_{X,Y} = \uparrow\uparrow} \epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y}, \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\Delta_{X,Y} = \delta_X(1 - \delta_Y) + \delta_Y(1 - \delta_X)$ . On observe que les paires  $\{X,Y\} \in \mathcal{P}_2(B_\sigma)$  telles que  $D_{X,Y} = \uparrow\uparrow$  sont réalisées par les  $\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(B_\sigma)$  telles que  $D_{x,y} = \uparrow\uparrow$  ou  $\uparrow\downarrow$  ou  $\downarrow\uparrow$  ou  $\downarrow\downarrow$  ou  $\uparrow\uparrow$ .

Si  $D_{x,y} = \uparrow\uparrow$ ,  $x$  et  $y$  sont deux croisements de type 1 sur la première corde de  $\sigma$  :  $\epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y} = \epsilon_x \epsilon_y [\delta_x(1 - \delta_y) + \delta_y(1 - \delta_x)] = \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y}$ .

On a donc

$$1/2 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)/D_{x,y} = \uparrow\uparrow} \epsilon_X \epsilon_X \Delta_{X,X} = c_2(\sigma_1),$$

l'invariant de Casson de la première corde de  $\sigma$ .

Si  $D_{x,y} = \uparrow\downarrow$ ,  $x$  et  $y$  sont deux croisement de type 1 sur la deuxième corde :  $\Delta_{X,Y} = \Delta_{x,y}$ , car les deux ' $\delta$ ' sont changés, et donc :  $\epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y} = \epsilon_x \epsilon_y \Delta_{x,y}$ . Il suit que

$$1/2 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma)/D_{x,y} = \uparrow\downarrow} \epsilon_X \epsilon_X \Delta_{X,X} = c_2(\sigma_2).$$

On a donc

$$c_2(B_\sigma) = c_2(\sigma_1) + c_2(\sigma_2) + 1/2 \sum_{\substack{\{x,y\} \in \mathcal{P}_2(\sigma) \\ D_{x,y} = \downarrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\downarrow}} \epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y}.$$

On note  $S$  le troisième terme de cette expression :

montrons que  $S$  est égal à  $V_2(\sigma) = 1/2 \sum_{D_{x,y} = \downarrow\downarrow \text{ ou } \downarrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\downarrow} \lambda(x,y)$ .

Tout d'abord, on observe que le diagramme  $\uparrow\uparrow$  fait intervenir une paire de croisements  $\{x, y\}$  de type 2 : les ' $\epsilon$ ' sont changés, mais pas les ' $\delta$ '. On a donc  $\lambda(x, y) = W_2^2(D_{x,y})\epsilon_x\epsilon_y\Delta_{x,y} = (+1)(-\epsilon_X)(-\epsilon_Y)\Delta_{X,Y}$ .

De même, si  $D_{x,y} = \uparrow\uparrow$ , alors  $x$  est de type 1 sur la première corde et  $y$  est de type 2 :

$$\lambda(x, y) = (-1)\epsilon_x\epsilon_y\Delta_{x,y} = (-1)\epsilon_X(-\epsilon_Y)\Delta_{X,Y} = \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y}.$$

On a donc

$$\sum_{D_{x,y}=\uparrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\uparrow} \lambda(x, y) = \sum_{D_{x,y}=\uparrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\uparrow} \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y}.$$

Il reste donc à montrer que

$$\sum_{D_{x,y}=\uparrow\uparrow} \lambda(x, y) = \sum_{D_{x,y}=\uparrow\uparrow} \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y}. \quad (18)$$

On a vu dans la remarque 5.10 qui précède ce lemme que les termes contribuant à une telle somme viennent par couples  $(\{x, y\}; \{x, \overline{y}\})$  tels que  $D_{x,y} = D_{x,\overline{y}} = \uparrow\uparrow$  (i.e.  $\overline{y}$  est de type 2) et d'un des deux cas suivant :

**Cas 1 :**  $\epsilon_{\overline{y}} = -\epsilon_y$  et  $\delta_{\overline{y}} = \delta_y$ .

$$\text{Dans ce cas, } \lambda(x, y) + \lambda(x, \overline{y}) = (-1)\epsilon_x\epsilon_y\Delta_{x,y} + (-1)\epsilon_x(-\epsilon_y)\Delta_{x,y} = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} \epsilon_X = \epsilon_x & \text{et} & \delta_X = (1 - \delta_x), \text{ (car } x \text{ est de type 1 sur } \sigma_2), \\ \epsilon_Y = -\epsilon_y & \text{et} & \delta_Y = \delta_y, \text{ (car } y \text{ est de type 2),} \\ \epsilon_{\overline{Y}} = -\epsilon_{\overline{y}} = \epsilon_y & \text{et} & \delta_{\overline{Y}} = \delta_{\overline{y}} = \delta_y. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y} + \epsilon_X\epsilon_{\overline{Y}}\Delta_{X,\overline{Y}} &= \epsilon_x(-\epsilon_y)[(1 - \delta_x)(1 - \delta_y) + \delta_x\delta_y] \\ &\quad + \epsilon_x\epsilon_y[(1 - \delta_x)(1 - \delta_y) + \delta_x\delta_y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \lambda(x, y) + \lambda(x, \overline{y}) = \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y} + \epsilon_X\epsilon_{\overline{Y}}\Delta_{X,\overline{Y}} (= 0).$$

**Cas 2 :**  $\epsilon_{\overline{y}} = \epsilon_y$  et  $\delta_{\overline{y}} = (1 - \delta_y)$ .

$$\text{Alors } \lambda(x, y) + \lambda(x, \overline{y}) = (-1)\epsilon_x\epsilon_y\Delta_{x,y} + (-1)\epsilon_x\epsilon_y(1 - \Delta_{x,y}) = -\epsilon_x\epsilon_y.$$

Par ailleurs,

$$\begin{cases} \epsilon_X = \epsilon_x & \text{et} & \delta_X = (1 - \delta_x), \\ \epsilon_Y = -\epsilon_y & \text{et} & \delta_Y = \delta_y, \\ \epsilon_{\overline{Y}} = -\epsilon_{\overline{y}} = -\epsilon_y & \text{et} & \delta_{\overline{Y}} = \delta_{\overline{y}} = (1 - \delta_y). \end{cases}$$

On a donc  $\Delta_{X,Y} = (1 - \Delta_{x,y})$  et  $\Delta_{X,\overline{Y}} = \Delta_{x,y}$ . Il suit que

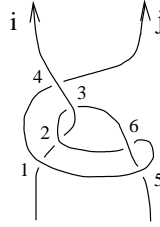
$$\begin{aligned} \epsilon_X\epsilon_Y\Delta_{X,Y} + \epsilon_X\epsilon_{\overline{Y}}\Delta_{X,\overline{Y}} &= \epsilon_x(-\epsilon_y)(1 - \Delta_{x,y}) + \epsilon_x(-\epsilon_y)\Delta_{x,y} \\ &= -\epsilon_x\epsilon_y. \end{aligned}$$

Dans le Cas 2, on obtient donc à nouveau l'égalité  $\lambda(x, y) + \lambda(x, \overline{y}) = \epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y} + \epsilon_X \epsilon_{\overline{Y}} \Delta_{X,\overline{Y}}$ .

Les termes contribuant aux sommes (de gauche et de droite) de (18) viennent donc par couples dont les sommes coïncident :  $\lambda(x, y) + \lambda(x, \overline{y}) = \epsilon_X \epsilon_Y \Delta_{X,Y} + \epsilon_X \epsilon_{\overline{Y}} \Delta_{X,\overline{Y}}$ . L'égalité (18) est donc vérifiée, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 5.12.** Nous avons déjà dit que ce lemme implique que  $V_2$  est bien un invariant des string-links à deux cordes. On peut montrer que le fait que  $V_2$  est un invariant de Vassiliev de degré 2 est aussi une conséquence de ce résultat. Il apparait donc que le lemme 5.11 implique les théorèmes 5.7 et 5.9.

**Exemple 5.13.** Nous détaillons ici le calcul de l'invariant  $V_2$  pour la version string-link de l'entrelacs de Whitehead  $w_{ji}$ , représentée ci-dessous.



On numérote les croisements de  $w_{ji}$  comme indiqué dans la figure. On a alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = -1 \quad ; \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = +1 \\ \delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = 1 \quad ; \quad \delta_3 = \delta_4 = \delta_6 = 0. \end{aligned}$$

L'expression de  $V_2(w_{ji})$  se réduit donc à la somme

$$\begin{aligned} V_2(w_{ji}) = 1/2 \Big( -W_2^2(D_{1,3}) + W_2^2(D_{1,4}) + W_2^2(D_{1,6}) + W_2^2(D_{2,3}) \\ - W_2^2(D_{2,4}) - W_2^2(D_{2,6}) - W_2^2(D_{3,5}) + W_2^2(D_{4,5}) + W_2^2(D_{5,6}) \Big). \end{aligned}$$

De plus, les diagrammes de cordes associés aux éléments de  $\mathcal{P}_2(w_{ji})$  sont :

$$\begin{aligned} D_{1,2} = D_{1,3} = D_{2,3} = \uparrow\uparrow \quad ; \quad D_{1,4} = D_{2,4} = D_{3,4} = \uparrow\uparrow \quad ; \quad D_{5,6} = \uparrow\uparrow \\ D_{1,5} = D_{1,6} = D_{4,5} = D_{4,6} = \uparrow\uparrow \quad ; \quad D_{2,5} = D_{2,6} = D_{3,5} = D_{3,6} = \uparrow\uparrow. \end{aligned}$$

Il suit que

$$V_2(w_{ji}) = 1/2(-1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0) = 1.$$

Ce calcul peut aussi s'effectuer simplement avec le lemme 5.11 :

$$V_2(w_{ji}) = c_2(b(w_{ji})) - c_2(\text{corde } i) - c_2(\text{corde } j) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

En effet, chacune des deux cordes, considérée individuellement, est le string-link trivial à une corde, et le bouclage de  $w_{ji}$  est le nœud de trèfle.

### 5.1.3 Invariants de Milnor

Nous terminons cette section sur les invariants de Vassiliev des string-links par un mot sur les invariants de Milnor, définis dans la section précédente. Il est connu ([BN2], [Lin]) que les invariants de Milnor de longueur  $k+1$  sont des invariants de Vassiliev d'ordre  $k$ . Le résultat suivant de K. Habiro est donc une conséquence du théorème 1.27 :

**Théorème 5.14.** *[H, Thm. 7.2] Pour  $k, n \geq 1$ , les  $\mu$ -invariants de Milnor de longueur  $k+1$  des string-links à  $n$  brins dans  $D^2 \times I$  sont des invariants de  $C_{k+1}$ -équivalence.*

## 5.2 Caractérisation de la $C_2$ -équivalence pour les string-links

### Application de chirurgie pour $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$

Soit  $A_1(n)$  le groupe abélien libre engendré par les *segments* (c'est-à-dire les graphes constitués de deux sommets reliés par un côté)<sup>20</sup> dont les sommets sont coloriés par l'ensemble  $(n) := \{x_1, \dots, x_n\}$ , sujets à la relation suivante

$$\text{Si } i = j, \quad I[x_i, x_j] = 0,$$

où  $I[x_i, x_j]$  désigne le segment dont un sommet est colorié par  $x_i$  et l'autre par  $x_j$  (la notation est en particulier symétrique :  $I[x_i, x_j] = I[x_j, x_i]$ ).

On définit une *application de chirurgie*

$$\varphi_1 : A_1(n) \rightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1(n)$$

comme suit : pour chaque générateur  $I[x_i, x_j]$  de  $A_1(n)$ ,  $x_i, x_j \in (n)$ , on considère dans  $(D^2 \times \{0\}) \subset \partial(D^2 \times I)$  les disques  $D_i$  et  $D_j$  voisinages des points standards  $x_i$  et  $x_j$ . Ces disques sont munis d'une orientation naturelle sur (un collier de) leur bord, en considérant le vecteur normal sortant en chaque point du bord. On pousse le disque  $D_i$  à l'intérieur de  $(D^2 \times I)$  le long de la  $i^{\text{ème}}$  corde  $\{x_i\} \times I$  de  $1_n$ , de telle sorte que cette corde intersecte toujours (transversalement)  $D_i$  en son centre, et on fait de même pour  $D_j$ . Puis, on connecte ces deux disques par une bande de telle sorte que l'orientation de la bande est compatible en ses deux extrémités avec les orientations des disques. La surface obtenue est un *clasper basique strict* (et simple) pour  $1_n$ . On note  $\phi(I[x_i, x_j])$  ce clasper basique :

$$\varphi_1(I[x_i, x_j]) := (1_n)_{\phi(I[x_i, x_j])}$$

est alors le string-link à  $n$  cordes obtenu du string-link trivial par chirurgie le long de  $\phi(I[x_i, x_j])$ .

**Théorème 5.15.**  $\varphi_1 : A_1(n) \rightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  est bien définie, et surjective.

---

<sup>20</sup>Ces graphes sont souvent appelés *struts* dans la littérature.



*Démonstration.* Il nous faut tout d'abord voir que l'application  $\varphi_1$  est indépendante du choix du plongement  $\phi$  : ceci est assuré par le fait que, si on note  $e$  le côté d'un clasper basique strict  $C$  pour  $1_n$  dans  $(D^2 \times I)$ , la classe de  $C_2$ -équivalence de  $(1_n)_C$  n'est pas modifiée lorsque l'on glisse  $e$  sur un nœud en bande de  $(D_n^2 \times I)$  (Lem. 1.34 et Rem. 1.35).

Par ailleurs,  $\varphi_1$  est compatible avec la relation  $I[x_i, x_i] = 0, \forall i$  : d'après ce que l'on vient de dire, le clasper  $\phi(I[x_i, x_i])$  peut être choisi tel que le string-link obtenu de  $1_n$  par chirurgie sur  $\phi(I[x_i, x_i])$  est isotope à  $1_n$  (il a deux boucles positives ou négatives sur sa  $i^{ieme}$  corde).

On a donc une application bien définie, et surjective, puisque le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  est engendré par les string-links  $(1_n)_C$ , où  $C$  est un clasper basique connexe.  $\square$

## Preuve du théorème 2.18

On va construire un inverse à gauche pour  $\varphi_1$ . Pour cela, on définit une application  $\mu_2 : \mathcal{SL}_1(n) \rightarrow A_1(n)$  par

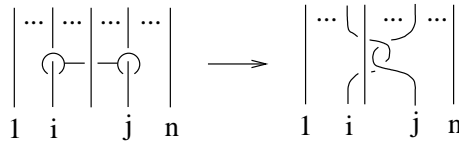
$$\mu_2(\sigma) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_{ij}(\sigma) I_{i,j},$$

où  $\mu_{ij}(\sigma)$  désigne le deuxième nombre de Milnor des cordes  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  :  $\mu_{ij}(\sigma) = lk(\sigma_i, \sigma_j)$  (voir §4.2.4). D'après le théorème 5.14,  $\mu_2$  se factorise en l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\mu_2 : \overline{\mathcal{SL}}_1(n) \rightarrow A_1(n).$$

Soit  $I_{i,j} := I[x_i, x_j]$  un générateur de  $A_1(n)$  :  $\varphi_1(I_{i,j})$  est le string-link obtenu de  $1_n$  par chirurgie le long d'un clasper basique dont la première feuille disquée intersecte  $1_n$  en un unique point appartenant à la  $i^{ieme}$  corde, et la seconde en un unique point appartenant à la  $j^{ieme}$  corde.  $\varphi_1(I_{i,j})$  étant considéré à  $C_2$ -équivalence près, on peut supposer que le côté du clasper n'est pas noué et n'enlace pas le string-link (Lem. 1.34) :  $\varphi_1(I_{i,j})$  est donc comme dans la figure ci-dessous.

Clairement, on a  $\mu_{mn}(\varphi_1(I_{i,j})) = -1$  pour  $(m, n) = (i, j)$ , et 0 sinon. Il suit

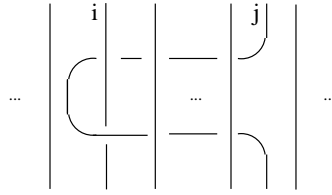


que  $\mu_2 \circ \varphi_1(I_{i,j}) = I_{i,j}$  pour tout générateur  $I_{i,j}$  de  $A_1(n)$ .

De plus, on déduit de ce qui précède que  $\mu_2$  est bien surjectif (pour tout générateur  $I_{i,j}$  de  $A_1(n)$ , on a en effet décrit un élément de  $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  qui est envoyé sur  $I_{i,j}$  par  $\mu_2$ ). Ceci montre que  $\varphi_1$  est un isomorphisme.

## Preuve du Lemme 2.20

Le théorème 2.18 montre que  $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$  est isomorphe, comme groupe abélien, à l'espace de diagrammes  $A_1(n)$  engendré par les segments dont les sommets sont coloriés par des éléments (distincts) de  $(n)$ . D'autre part, on a une présentation en termes de générateurs et relations du groupe  $\mathcal{P}(n)$  des tresses pures à  $n$  brins ([MKS, p. 174]) :  $\mathcal{P}(n)$  est engendré par l'ensemble des  $A_{i,j}$  (représenté dans la figure ci-dessous), pour  $1 \leq i < j \leq n$ , et les relations sont les suivantes :



$$\begin{aligned}
 A_{r,s} A_{i,k} A_{r,s}^{-1} &= A_{i,k} \quad , \quad \text{si } s < i \text{ ou } k < r, \\
 A_{k,s} A_{i,k} A_{k,s}^{-1} &= A_{i,s}^{-1} A_{i,k} A_{i,s} \quad , \quad \text{si } i < k < s, \\
 A_{r,k} A_{i,k} A_{r,k}^{-1} &= A_{i,k}^{-1} A_{i,r}^{-1} A_{i,k} A_{i,r} A_{i,k} \quad , \quad \text{si } i < r < k, \\
 A_{r,s} A_{i,k} A_{r,s}^{-1} &= A_{i,s}^{-1} A_{i,r}^{-1} A_{i,s} A_{i,r} A_{i,k} A_{i,r}^{-1} A_{i,s}^{-1} A_{i,r} A_{i,s} \quad , \quad \text{si } i < r < k < s.
 \end{aligned}$$

L'abélianisé de  $\mathcal{P}(n)$  est donc le groupe abélien libre engendré par les  $A_{i,j}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ), qui est clairement isomorphe à l'espace de diagrammes  $A_1(n)$  et donc à  $\overline{\mathcal{SL}}_1(n)$ .

## 5.3 Caractérisation de la $C_3$ -équivalence pour les string-links

### 5.3.1 Application de chirurgie pour $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$

**L'espace de diagrammes  $A_2(n)$ .** On note  $A_2(n)$  le groupe abélien libre engendré par les graphes en forme de Y dont le 3-sommet est muni d'un ordre cyclique sur les côtés incidents et dont les 1-sommets sont coloriés par  $(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , l'ensemble des 1-sommets portant la même couleur étant (le cas échéant) muni d'un ordre total,<sup>21</sup> sujets aux relations

**Antisymétrie (AS) :**

$$\text{Si } i \neq j, \quad Y[x_i; x_j; \dots] = -Y[x_j; x_i; \dots],$$

**Antisymétrie 2 (AS2) :**

$$Y[(x_i, n_1); (x_i, n_2); \dots] = -Y[(x_i, n_2); (x_i, n_1); \dots],$$

**Bi-symétrie (BS) :**

$$\text{Si } i \neq j, \quad Y[(x_i, n_1); (x_i, n_2); x_j] = Y[(x_j, n_1); (x_j, n_2); x_i],$$

---

<sup>21</sup>Plus précisément, on ajoute une seconde étiquette sur ces 1-sommets, prise (sans répétition) dans  $\{1; 2; 3\}$ .

pour tout  $x_i, x_j \in (n)$  et pour tout  $n_1 \neq n_2 \in \{1; 2; 3\}$ .

**L'application de chirurgie  $\varphi_2$ .** Pour chaque générateur

$$Y_{i,j,k} := Y[(x_i, n_i); (x_j, n_j); (x_k, n_k)]$$

de  $A_2(n)$ , on considère dans la partie supérieure du bord  $(D^2 \times \{0\}) \subset \partial(D^2 \times I)$  les disques  $D_i, D_j$  et  $D_k$ , voisinages des points standards. Comme dans §5.2, on observe que ces disques sont munis d'une orientation naturelle sur (un collier de) leur bord, en considérant le vecteur normal sortant en chaque point du bord. Puis, on pousse ces disques à l'intérieur de  $(D^2 \times I)$  dans l'ordre prescrit par la seconde étiquette. Autrement dit, si  $x_i = x_j$  et  $n_i < n_j$ , le disque  $D_j$  se trouve au dessus de  $D_i$  dans  $(D^2 \times I)$ . On pousse les disques à l'intérieur de  $(D^2 \times I)$  le long des cordes de  $1_n$ , la  $i^{\text{ieme}}$  (resp.  $j^{\text{ieme}}$  et  $k^{\text{ieme}}$ ) corde intersectant toujours (transversalement)  $D_i$  (resp.  $D_j$  et  $D_k$ ) en son centre. On choisit ensuite un disque  $D$  plongé dans l'intérieur de  $(D^2 \times I)$ , disjoint des autres disques et de  $1_n$ , que l'on oriente de façon arbitraire, et on le connecte aux  $D_i$  par des bandes  $e_i$  dans  $1_{D^2} \setminus 1_n$ . On demande que ces bandes soient compatibles avec les orientations des différents constituants, ainsi qu'avec l'ordre cyclique  $(i, j, k)$ . On obtient ainsi un clasper de C-degré 2, simple et strict pour  $1_n$ , noté  $\phi(Y_{i,j,k})$ . Notons  $\varphi_2(Y_{i,j,k}) := (1_n)_{\phi(Y_{i,j,k})}$  le résultat de la chirurgie sur  $1_n$  le long de  $\phi(Y_{i,j,k})$ .

**Théorème 5.16.** *La classe de  $C_3$ -équivalence de  $(1_n)_{\phi(Y_{i,j,k})}$  est indépendante du choix de  $\phi$ . On définit ainsi une application surjective :*

$$A_2(n) \xrightarrow{\varphi_2} \overline{\mathcal{SL}}_2(n).$$

*Démonstration.* Comme dans la preuve du théorème 3.6, l'indépendance par rapport aux choix de  $D$ , de son orientation et des côtés  $e_i$  découle des deux faits suivants. Soit  $G$  un clasper strict de C-degré 2 pour un string-link  $\sigma$ , alors :

**Fait 1** La classe de  $C_3$ -équivalence de  $\sigma_G$  n'est pas modifiée lorsque l'on fait la somme connexe d'un côté de  $G$  avec un nœud en bandes de  $1_{D^2} \setminus 1_n$  (Lem. 1.34 et Rem. 1.35).

**Fait 2** La classe de  $C_3$ -équivalence de  $\sigma_G$  est inversée lorsque l'on effectue un demi-twist sur un côté de  $G$  (voir Rem. 2.27).

Il suit que  $(1_n)_{\phi(Y_{i,j,k})}$  est indépendante du choix de  $\phi$ .

Montrons maintenant que  $\varphi_2$  est compatible avec les relations de  $A_2(n)$ . Les relations (AS) et (AS2) se montrent dans  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  par le Fait 2, au vu de l'observation suivante (illustrée par la figure 38) : une inversion de l'ordre cyclique sur le 3-sommet d'un diagramme  $Y$  est réalisée par l'isotopie de  $\phi(Y)$  qui consiste en un demi-twist sur chacun des trois côtés incidents.

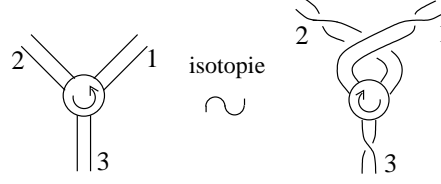


FIG. 38 –

Pour (BS), remarquons que le diagramme  $Y[(x_j, 1); (x_j, 2); (x_i, 3)]$ ;  $n_1 < n_2$  (resp.  $Y[(x_i, 1); (x_i, 2); (x_j, 3)]$ ) est envoyé sur le string-link  $w_{ij}$  (resp.  $w_{ji}$ ) dont les brins  $i$  et  $j$  forment un entrelacs de Whitehead dans des rôles symétriques (voir Figure 39). Or, de même que sa fermeture, la version

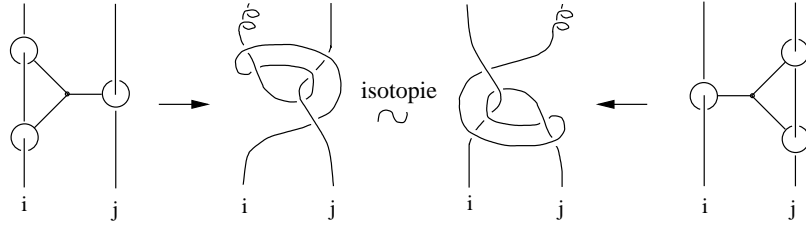


FIG. 39 – Les string-links  $w_{ij}$  et  $w_{ji}$ .

string-link de l'entrelacs de Whitehead a la propriété remarquable d'être symétrique, au sens où il existe une isotopie échangeant ses composantes.

Enfin, le fait que le groupe abélien  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$  est engendré par les  $(\sigma)_G$  où  $G$  est un arbre de  $C$ -degré 2, simple, strict et connexe (qui se montre par des calculs de clasps standards) montre que  $\varphi_2$  est surjective.  $\square$

### 5.3.2 Preuve du théorème 2.21

Jusqu'ici, on a montré (§5.3.1) qu'il existe un espace de diagrammes  $A_2(n)$  et une application de chirurgie surjective  $\varphi_2 : A_2(n) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_2(n)$ . On va maintenant établir l'isomorphisme  $\eta : A_2(n) \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H$  annoncé dans §2.2.3, puis définir (avec les invariants étudiés dans §5.1) l'homomorphisme  $(\mu_3, V_2, c_2) : \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H$  tel que  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2 = \eta$ .

**L'isomorphisme  $\eta$ .** Soit  $A_{2,k}(n) \subset A_2(n)$  le sous-groupe engendré par les diagrammes dont les 1-sommets sont coloriés avec  $k$  éléments distincts de  $(n)$ . Les relations dans  $A_2(n)$  sont graduées : on a clairement<sup>22</sup>

$$A_2(n) = A_{2,3}(n) \oplus A_{2,2}(n) \oplus A_{2,1}(n). \quad (19)$$

<sup>22</sup>Notons que, les diagrammes de  $A_{2,3}(n)$  étant coloriés par trois éléments distincts de  $(n)$ , il n'y a pas d'ordre sur les 1-sommets, et donc pas de seconde étiquette.

Etant donnés deux entiers distincts  $n_i$  et  $n_j$ , on définit  $\varepsilon_{i,j} \in \{-1; +1\}$  par  $\varepsilon_{i,j} = \frac{n_j - n_i}{|n_j - n_i|}$ . De plus, pour tout  $1 \leq n_i \neq n_j \neq n_k \leq 3$ , on note  $\varepsilon_{ijk}$  le signe

de la permutation  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n_i & n_j & n_k \end{bmatrix}$ .

Soit  $\eta : A_2(n) \rightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H$  l'application définie par

$$\begin{aligned} \eta(Y[x_1; x_2; x_3]) &= x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 && \text{sur } A_{2,3}(n), \\ \eta(Y[(x_1, n_i); (x_1, n_j); x_2]) &= \varepsilon_{i,j} \cdot (x_1 \otimes x_2) && \text{sur } A_{2,2}(n), \\ \eta(Y[(x_1, n_i); (x_1, n_j); (x_1, n_k)]) &= \varepsilon_{ijk} \cdot (x_1 \otimes x_1) && \text{sur } A_{2,1}(n). \end{aligned}$$

**Lemme 5.17.**  *$\eta$  est un isomorphisme de groupes abéliens.*

*Démonstration.* On vérifie aisément avec les relations (AS), (AS2) et (BS) (voir §5.3.1) que  $\eta$  est bien définie, et donc surjective. De plus,

- Par la relation (AS), on voit que  $A_{2,3}(n)$  a pour base l'ensemble des  $Y$  de la forme  $Y[x_i; x_j; x_k]$ , avec  $i < j < k$ . C'est donc un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $C_3^n$ , qui est envoyé (par  $\eta$ ) sur  $\Lambda^3 H$  : la restriction de  $\eta$  à  $A_{2,3}(n)$  est un épimorphisme entre deux  $\mathbf{Z}$ -modules de rang  $C_3^n$ , donc un isomorphisme.
- Les relations (AS2) et (BS) impliquent que  $A_{2,2}(n)$  (respectivement  $A_{2,1}(n)$ ) a pour base les  $Y[(x_i, n); (x_i, m); x_j]$ , avec  $i < j$  et  $n < m$  (resp. les  $n$  diagrammes  $Y$  de la forme  $Y[(x_i, 1); (x_i, 2); (x_i, 3)]$ ).  $A_{2,2}(n) \oplus A_{2,1}(n)$  est donc un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $C_2^n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2+n}{2} = \text{rg}(S^2 H)$ , que  $\eta$  envoie surjectivement sur  $S^2 H$ . Il suit que  $A_{2,2}(n) \oplus A_{2,1}(n) \simeq S^2 H$  via  $\eta$ .

□

**Démonstration du théorème 2.21.** Soit

$$(\mu_3, V_2, c_2) : \mathcal{SL}_2(n) \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H$$

l'application qui envoie tout élément  $\sigma \in \mathcal{SL}_2(n)$  sur

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu_{ijk}(\sigma) \cdot e_i \wedge e_j \wedge e_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_2(\sigma_i \cup \sigma_j) \cdot e_i \otimes e_j + \sum_{1 \leq i \leq n} (c_2)_i(\sigma) \cdot e_i \otimes e_i,$$

où on rappelle que  $\sigma_i$  désigne la  $i^{\text{ieme}}$  corde de  $\sigma$ . Cette application est bien définie.

D'après §5.1.1 et les théorèmes 5.14 et 5.7,  $(\mu_3, V_2, c_2)$  se factorise en l'homomorphisme de groupes abéliens

$$(\mu_3, V_2, c_2) : \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus S^2 H.$$

Le lemme suivant est la dernière étape de la démonstration du théorème 2.21 : il implique en effet que  $\varphi_2$  et  $(\mu_3, V_2, c_2)$  sont des isomorphismes.

**Lemme 5.18.** *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc}
A_2(n) & \xrightarrow{\varphi_2} & \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \\
& \searrow \eta \simeq & \downarrow (\mu_3, V_2, c_2) \\
& & \Lambda^3 H \oplus S^2 H
\end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $Y$  un générateur de  $A_2(n)$ . Voyons que, quel que soit le type de générateur considéré (au sens de la décomposition (19)), on a bien  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2(Y) = \eta(Y)$ .

$Y \in A_{2,3}(n)$  :  $Y$  est donc de la forme  $Y[x_i; x_j; x_k]$ , avec  $x_i \neq x_j \neq x_k \in (n)$ , montrons que  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2(Y) = e_i \wedge e_j \wedge e_k \in \Lambda^3 H$ .

Un représentant de  $\varphi_2(Y) \in \mathcal{SL}_2(n)$  est le string-link  $\sigma_{ijk}$  obtenu de  $1_n$  en faisant la somme connexe des brins  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$  et  $\sigma_k$  avec les trois composantes d'un entrelacs borroméen. En effet, on rappelle de l'exemple 1.19 qu'un  $C_2$ -mouvement simple est réalisé par une telle somme connexe (voir Fig. 9 dans l'exemple 1.19).

On a donc  $\mu_{abc}(\sigma_{ijk}) = 1$  pour  $(a, b, c) = (i, j, k)$ , et 0 sinon. De plus,  $V_2$  est nul pour le string-link formé par toute paire de cordes de  $\sigma_{ijk}$  (on obtient toujours le string-link trivial  $1_2$ ). De même, les invariants de Casson  $c_2$  sont tous nuls. Il résulte que  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2(Y) = e_i \wedge e_j \wedge e_k$ .

$Y \in A_{2,2}(n)$  :  $Y$  est de la forme  $Y[(x_i, m); (x_i, n); x_j]$ ;  $x_i \neq x_j$  et  $m < n$ .

Un représentant de  $\varphi_2(Y)$  est alors le string-link  $w_{ij}$  dont les brins  $i$  et  $j$  forment un entrelacs de Whitehead (voir Fig. 30(b)). On a vu dans l'exemple 5.13 que, pour un tel string-link  $\sigma$ ,  $V_2(\sigma_i \cup \sigma_j)$  prend la valeur 1.  $V_2$  vaut 0 pour toute autre paire de cordes, puisqu'on est toujours dans le cas où au moins une des composantes est isolée, et les triples nombres de Milnor sont tous nuls pour cette même raison. Enfin, tous les invariants de Casson s'annulent.

On obtient donc :  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2(Y) = e_i \otimes e_j = \eta(Y) \in S^2 H$

$Y \in A_{2,1}(n)$  :  $Y$  est alors de la forme  $Y[(x_i, n); (x_i, m); (x_i, p)]$ ;  $m < n < p$ .

Son image  $\varphi_2(Y)$  a pour représentant le string-link  $T_i$  qui diffère de  $1_n$  par une copie du nœud de trèfle sur la  $i^{ieme}$  composante (voir Fig. 30(c)). Clairement, tous les triples nombres de Milnor et les invariants de  $V_2$  s'annulent sur  $T_i$ . En revanche, l'invariant  $c_2$  de la  $i^{ieme}$  corde de  $T_i$  vaut 1, comme invariant de Casson du nœud de trèfle, et bien sûr 0 sur les autres cordes.

On a donc  $(\mu_3, V_2, c_2) \circ \varphi_2(Y) = e_i \otimes e_i = \eta(Y) \in S^2 H$ .

Ceci achève la preuve du lemme 5.18, et donc du théorème 2.21.  $\square$

#### 5.4 Lien entre $C$ -filtration et $Y$ -filtration pour les string-links.

Dans cette section, on va confronter les deux relations d'équivalence chirurgicales sur les string-links induites par la théorie des claspers : la  $Y_k$ -équivalence pour les string-links framés des boules d'homologie et la  $C_k$ -équivalence pour les string-links dans  $D^2 \times I = 1_{D^2}$ . En particulier, on démontre ici le théorème 2.23.

Rappelons les notations utilisées dans les sections précédentes :

$$\mathcal{SL}_k^{hb}(n) = \{(M, \sigma) \sim_{Y_k} (1_{D^2}, 1_n)\} \subset \mathcal{SL}^{hb}(n), \text{ et } \overline{\mathcal{SL}}_k^{hb}(n) = \mathcal{SL}_k^{hb}(n)/Y_{k+1},$$

$$\mathcal{SL}_k(n) = \{\sigma \sim_{C_k} 1_n\} \subset \mathcal{SL}(n), \text{ et } \overline{\mathcal{SL}}_k(n) = \mathcal{SL}_k(n)/C_{k+1}.$$

Dans cette section,  $H$  désigne le premier groupe d'homologie  $H_{0,n+1} = H_1(\Sigma_{0,n+1}, \mathbf{Z})$  du disque à  $n$  trous, et  $H_{(2)} = H \otimes \mathbf{Z}_2$ . De même, on note  $P$  le groupe abélien  $P_{0,n+1} = H_1(F1_{\Sigma_{0,n+1}}, \mathbf{Z})$  (voir §3.1.2).

On a vu dans §4 l'isomorphisme (non canonique) de groupes abéliens  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) \simeq \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} \oplus \mathbf{Z}_2$ , où la partie  $\mathbf{Z}_2$  est donnée par le  $\mu$ -invariant de Rochlin. On a donc la décomposition

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n) = \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \cup \overline{\mathcal{SL}}_1^{(1)}(n),$$

où  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{(\epsilon)}(n)$  ( $\epsilon = 0, 1$ ) est le sous-ensemble de  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$  des éléments  $(M, \sigma)$  tels que  $R(M) = \epsilon$ .

En particulier,  $\overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n)$  est un sous-groupe, et on a clairement l'isomorphisme

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \simeq \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)},$$

donné par le triple nombre de Milnor et les invariants de Sato-Levine et de Arf. Plus précisément, cet isomorphisme est réalisé par l'application

$$\overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \xrightarrow{(\mu_3, \beta^{(2)}, a)} \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)}$$

définie par

$$\begin{aligned} (\mu_3, \beta^{(2)}, a)(M, \sigma) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu_{ijk}(M, \sigma).e_i \wedge e_j \wedge e_k \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij}^{(2)}(M, \sigma).e_i^r \wedge e_j^r + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(M, \sigma).e_i^r, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$  est la base de  $H$  introduite dans §4.3, et où  $e_i^r$  désigne l'élément réduit modulo 2.

Rappelons que  $\mathcal{A}_1(P)$  est le groupe abélien libre engendré par les diagrammes en forme de  $Y$ , dont le 3-sommet est muni d'un ordre cyclique et

dont les 1-sommets sont coloriés par des éléments de  $P$ , modulo les relations Multilinéarité et Glissement (voir §3.1.1).

On note  $\mathcal{A}_1^{(\epsilon)}(P)$  (pour  $\epsilon \in \{0; 1\}$ ), le sous-ensemble de  $\mathcal{A}_1(P)$  engendré par les diagrammes  $\Upsilon[(h_1, \varepsilon_1); (h_2, \varepsilon_2); (h_3, \varepsilon_3)]$  tels que  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = \epsilon$ .<sup>23</sup> On a

$$\mathcal{A}_1(P) = \mathcal{A}_1^{(0)}(P) \cup \mathcal{A}_1^{(1)}(P).$$

Là encore,  $\mathcal{A}_1^{(0)}(P)$  est un sous-groupe et il est clair d'après la preuve du lemme 3.9 que  $\rho$  induit un isomorphisme

$$\rho^{(0)} : \mathcal{A}_1^{(0)}(P) \xrightarrow{\simeq} \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)}.$$

On rappelle de §4.1 l'application de chirurgie  $\phi : \mathcal{A}_1(P) \longrightarrow \overline{\mathcal{SL}}_1^{hb}(n)$ .  $\phi$  est surjective. Il suit de ce qu'on a vu dans les sections précédentes que le  $\mu$ -invariant de  $\phi(\Upsilon)$  est nul si et seulement si  $\Upsilon \in \mathcal{A}_1^{(0)}(P)$  :  $\phi$  induit donc une application surjective

$$\mathcal{A}_1^{(0)}(P) \xrightarrow{\phi^{(0)}} \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n).$$

Il suit de §4.3 que le diagramme suivant est commutatif .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1^{(0)}(P) & \xrightarrow{\phi^{(0)}} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) \\ & \searrow \simeq & \downarrow (\mu_3, \beta^{(2)}, a) \\ & \rho^{(0)} & \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)}. \end{array}$$

$\phi^{(0)}$  est donc un isomorphisme.

Rappelons par ailleurs que  $A_2(n)$  est le groupe abélien libre engendré par les diagrammes en forme de  $\Upsilon$ , dont le 3-sommet est muni d'un ordre cyclique et dont les 1-sommets sont coloriés par  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , munis d'un ordre sur les 1-sommets de même couleur, modulo les relations  $(AS)$ ,  $(AS2)$  et  $(BS)$  (voir §5.3.1). On définit une application

$$A_2(n) \xrightarrow{d} \mathcal{A}_1^{(0)}(P)$$

qui consiste à *oublier l'ordre sur les 1-sommets* : on envoie le générateur  $\Upsilon[(x_i, n_i); (x_j, n_j); (x_k, n_k)]$  de  $A_2(n)$  sur le diagramme  $\Upsilon[(e_i, 0); (e_j, 0); (e_k, 0)]$ ,

---

<sup>23</sup>On rappelle de Rem. 3.5 que  $P$  est isomorphe à l'extension centrale de  $H$  par  $\mathbf{Z}_2$ , le 2-cocycle associé étant la réduction mod 2 de la forme d'intersection sur  $\Sigma$ .



où  $e_i \in \mathcal{B}$ . Clairement, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_2(n) & \xrightarrow[\cong]{\eta_2} & \Lambda^3 H \oplus S^2 H \\ \downarrow d & & \downarrow f \\ \mathcal{A}_1^{(0)}(P) & \xrightarrow[\rho^{(0)}]{\cong} & \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)}, \end{array}$$

où  $f$  est l'application surjective

$$f : \Lambda^3 H \oplus S^2 H \longrightarrow \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)}$$

donnée par l'identité sur  $\Lambda^3 H$ , et sur  $S^2 H$  par  $\begin{cases} f(e_i \otimes e_j) = e_i^r \wedge e_j^r & \text{si } i \neq j, \\ f(e_i \otimes e_i) = e_i^r & \text{sinon.} \end{cases}$

Il suit que  $d$  est elle aussi surjective.

On définit enfin une application

$$\overline{\mathcal{SL}}_2(n) \xrightarrow{T} \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n)$$

de la façon suivante. Etant donné un générateur  $\sigma$  de  $\overline{\mathcal{SL}}_2(n)$ , on considère

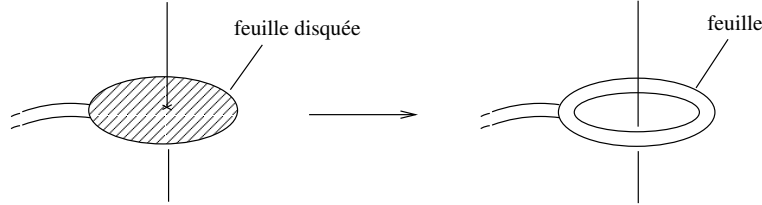
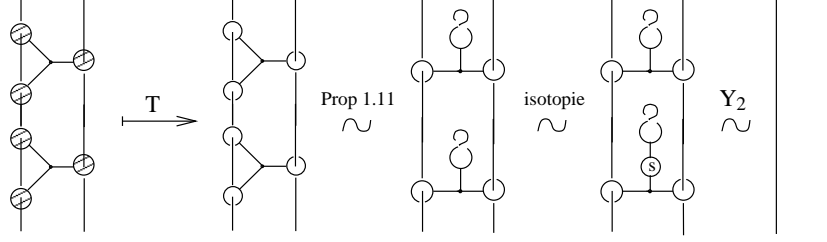


FIG. 40 – L'application  $T$ .

l'arbre de clasper  $G_\sigma$  de C-degré 2 strict pour  $1_n \in 1_{D^2}$  tel que  $\sigma$  est obtenu de  $1_n$  par chirurgie sur  $G_\sigma$  :  $T$  consiste alors à *trouer* chaque feuille disquée de  $G_\sigma$ , c'est-à-dire enlever un petit disque  $d$  tel que  $1_n$  intersecte la feuille disquée à l'intérieur de  $d$ ; on munit de plus le string-link  $1_n$  du framing nul. Comme le montre la figure 40, perforer une feuille disquée de  $G_\sigma$  produit une feuille :  $G_\sigma$  devient un Y-graphe  $\tilde{G}_\sigma$ , c'est-à-dire un clasper Y-degré 1 acceptable pour  $1_n$  dans  $D^2 \times I$ , et

$$T(\sigma) := (1_{D^2}, 1_n)_{\tilde{G}_\sigma}.$$

On remarque que l'application  $T$  a un noyau qui est non trivial; un exemple est donné dans la figure ci-dessous.



Il suit des définitions des applications de chirurgie  $\varphi_2$  et  $\phi^{(0)}$  que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A_2(n) & \xrightarrow{\varphi_2} & \overline{\mathcal{SL}}_2(n) \\
 \downarrow d & & \downarrow T \\
 \mathcal{A}_1^{(0)}(P) & \xrightarrow{\phi^{(0)}} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n),
 \end{array}$$

d'où l'on déduit que l'application  $T$  est surjective. Ceci démontre la première partie du théorème 2.23.

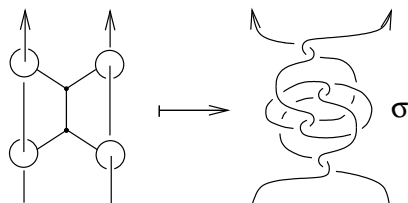
On peut résumer ce qui a été dit dans cette section par le diagramme commutatif suivant, dont les flèches des triangles supérieurs et inférieurs sont des isomorphismes, et les flèches verticales des épimorphismes.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_2(n) & \xrightarrow{\varphi_2} & \overline{\mathcal{SL}}_2(n) & & \\
 \downarrow d & \searrow \eta_2 & \downarrow T & \nearrow (\mu_3, V_2, c_2) & \\
 & \Lambda^3 H \oplus S^2 H & & & \\
 & \downarrow f & & & \\
 \mathcal{A}_1^{(0)}(P) & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{SL}}_1^{(0)}(n) & \xrightarrow{\phi^{(0)}} & \\
 \searrow \rho^{(0)} & & \downarrow & \nearrow (\mu_3, \beta^{(2)}, a) & \\
 & \Lambda^3 H \oplus \Lambda^2 H_{(2)} \oplus H_{(2)} & & & 
 \end{array}$$

Une conséquence de la commutativité de ce diagramme est que les applications  $(\mu_3, V_2, c_2)$  et  $(\mu_3, \beta^{(2)}, a)$  coïncident *via* l'application surjective  $T$  (et  $f$ ). En particulier, on observe donc que la réduction modulo 2 de l'invariant  $V_2$  coïncide avec  $\beta^{(2)}$ , la réduction modulo 2 de l'invariant de Sato-Levine :

$$V_2 \equiv \beta \pmod{2}.$$

Cependant, ces invariants sont différents : si on note  $\sigma$  le string-link à deux cordes représenté ci-dessous, on vérifie par exemple que  $V_2(\sigma) = 0$  tandis que  $\beta(\sigma) = 2$ .



## A L'invariant de Vassiliev $V_2$ .

On se propose ici de démontrer que l'invariant  $V_2$  défini dans §5.1.2 est bien un invariant des string-links à deux cordes, autrement dit qu'il est inchangé par les trois mouvements de Reidemeister (voir Figure 41). Comme on l'a dit dans la preuve du théorème 5.7, ceci peut être vu comme

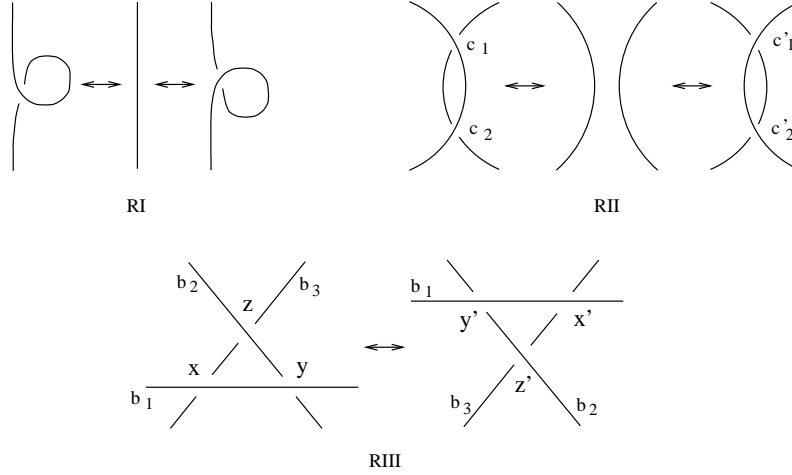


FIG. 41 – Les 3 mouvements de Reidemeister

un corollaire du lemme 5.11. Les quelques pages qui suivent le démontrent à partir de la seule définition de  $V_2$ . Les notations de la section 5.1 seront adoptées.

Tout d'abord, il est clair que  $V_2$  ne change pas par RI, puisqu'il fait intervenir un point double du type  $\uparrow$  qui n'enlace aucun autre :  $W_2^2$  est nul pour les diagrammes de cordes contenant une telle corde par (15) (c'est la relation (1T) :  $W(\uparrow) = 0$ ).

Le mouvement RII fait intervenir deux croisements successifs  $c_1$  et  $c_2$  tels que  $\epsilon_{c_1} = -\epsilon_{c_2}$  et  $\delta_{c_1} = \delta_{c_2}$ . Ainsi,  $\lambda(c_1, c_2) = 0 = \lambda(c'_1, c'_2)$ . On vérifie de plus que, lorsqu'on regarde les croisements  $x \neq c_i$  ( $i = 1, 2$ ), on a  $D_{c_1, x} = D_{c_2, x}$ , d'où  $\lambda(c_1, x) + \lambda(c_2, x) = \epsilon_{c_1} \epsilon_x \Delta_{c_1, x} (W_2^2(D_{c_1, x}) - W_2^2(D_{c_2, x})) = 0$  (il en est de même pour  $c'_1$  et  $c'_2$ ).

Voyons maintenant l'invariance de  $V_2$  sous RIII. Commençons par remarquer que (quelle que soit l'orientation des brins) on a

$$\epsilon_c = \epsilon_{c'} \text{ et } \delta_c = \delta_{c'} \text{ pour tout } c = x, y, z.$$

Soit un croisement  $t \neq x, y, z$  : on a  $D_{t, c} = D_{t, c'}$ , pour tout  $c = x, y, z$ , d'où clairement  $\lambda(t, x) + \lambda(t, y) + \lambda(t, z) = \lambda(t, x') + \lambda(t, y') + \lambda(t, z')$ . Il reste à voir que

$$\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z').$$

Pour cela, on oriente les brins dans la figure 41 de façon arbitraire. Pour des raisons de symétrie, il y a essentiellement 4 cas, que l'on nommera RIII(a) à RIII(d) : voir Figure 42. Pour chacun de ces 4 cas, on considère les dia-

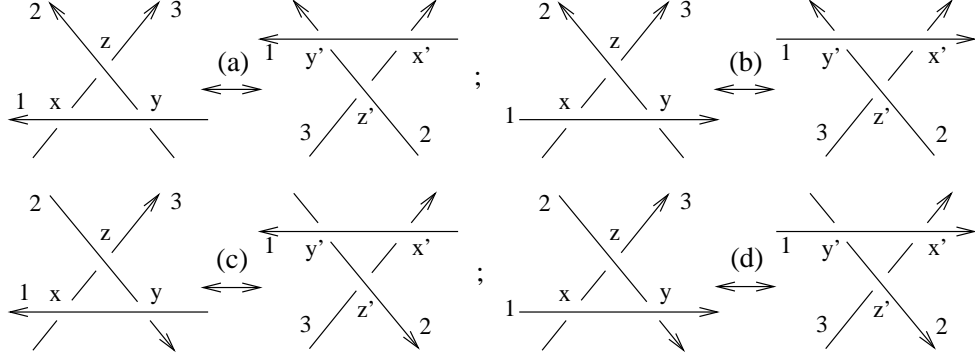


FIG. 42 – Les mouvements RIII(a) à RIII(d)...

grammes de cordes à 3 brins associés (voir Figure 43), appelé *diagramme caractéristique* de la relation.

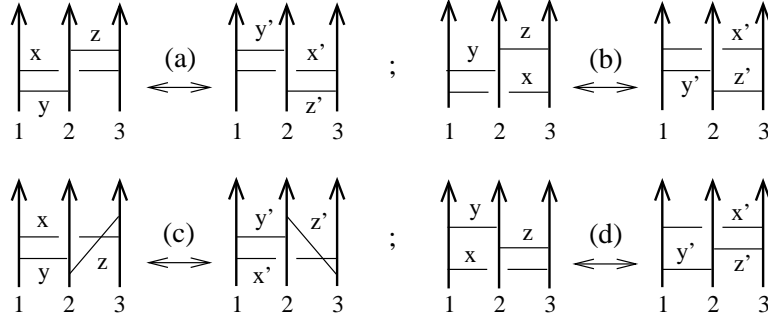


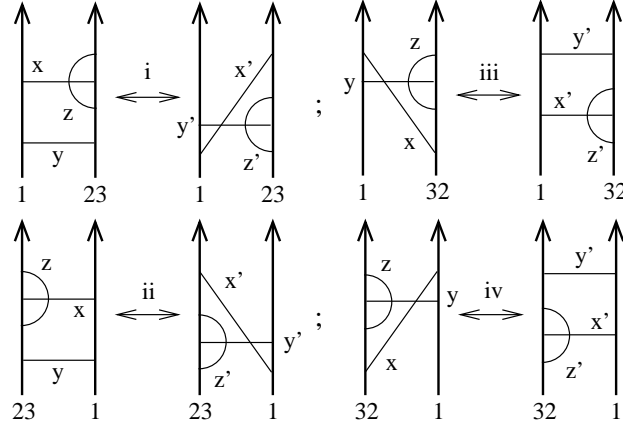
FIG. 43 – ... et les diagrammes caractéristiques correspondants.

- On s'intéresse à présent au cas du *mouvement RIII(a)*. Il faut examiner l'ensemble des diagrammes de cordes à 2 brins que l'on obtient en raccordant les brins 1, 2 et 3 du diagramme caractéristique de la figure 43(a). Puisque  $W_2^2$  s'annule sur l'ensemble des diagrammes ayant un brin sans cordes, il suffit d'isoler un des trois brins et de raccorder les deux autres. Par exemple, considérons les 4 relations obtenues en isolant le brin 1. On a (dans tous les cas)  $\epsilon_x = \epsilon_{x'} = \epsilon_y = \epsilon_{y'} = \epsilon_z = \epsilon_{z'} = (-1)$ .

- Cas *i* : on le désignera par (a)[1-23], puisqu'on a isolé le brin 1 et raccordé le brin 2 au brin 3.

On a :  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$  ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$  ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ . Alors clairement  $\lambda(x, y) = \lambda(x, z) = \lambda(y, z) = \lambda(x', y') = \lambda(x', z') = \lambda(y', z') = 0$ .

- Cas *ii* : (a)[1-32].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$  ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$  ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .



D'où  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = W_2^2(D_{x,z}) + W_2^2(D_{y,z})$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = W_2^2(D_{x',z'}) + W_2^2(D_{y',z'})$ .

De plus,  $D_{x,y} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\uparrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\uparrow$ .

On a donc  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = (-1) = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z')$ .

- Cas *iii* : (a)[23-1].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$D_{x,y} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\uparrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\uparrow$ . D'où  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = W_2^2(D_{x,z}) + W_2^2(D_{y,z}) = (-1)$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = W_2^2(D_{x',z'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = (-1)$ .

- Cas *iv* : (a)[32-1].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

Donc  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = 0 = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z')$ .

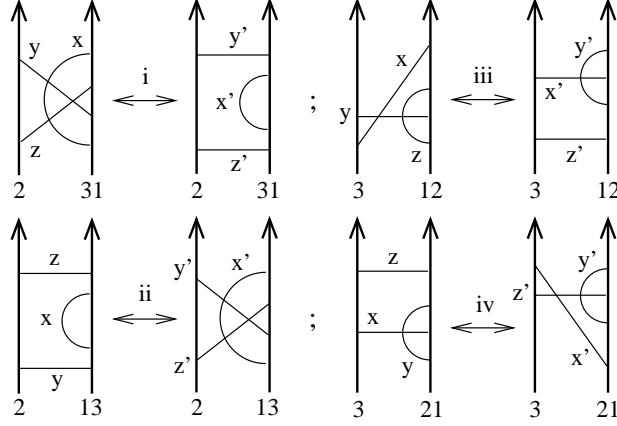
Dans chacun des cas considérés, on a bien la relation voulue :

$$\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z').$$

Notons à propos de ces calculs que, pour des raisons de symétrie, les cas *i* et *iii* sont respectivement essentiellement les mêmes que les cas *iv* et *ii* : les  $\delta$  sont envoyés sur  $(1 - \delta)$ , et les diagrammes de cordes  $D_{c_1, c_2}$  et  $D_{c'_1, c'_2}$  sont symétriques (par rapport à l'axe médian), symétrie qui n'est pas détectée par  $W_2^2$ . Ainsi, par la suite on ne regardera plus que les diagrammes de cordes à deux brins tel que le *second* brin est obtenu en raccordant deux brins du diagramme caractéristique de la relation considérée. Ainsi, pour achever le cas du mouvement RIII(a), il reste à considérer les 4 cas de la figure suivante

- Cas *i* : (a)[2-31].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

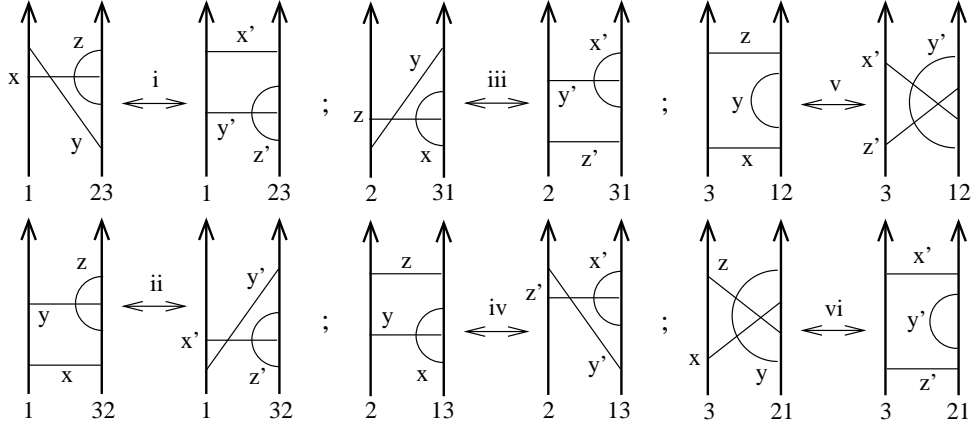
$D_{x,y} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\uparrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\uparrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\uparrow$ .



- $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = W_2^2(D_{x,z}) + W_2^2(D_{y,z}) = -1 + 1 = 0$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = W_2^2(D_{x',z'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = 0 + 0 = 0$ .
- Cas *ii* : (a)[2-13].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .  
 $D_{x,y} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\downarrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\downarrow$ .  
 $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = W_2^2(D_{x,y}) + W_2^2(D_{y,z}) = 0$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = W_2^2(D_{x',y'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = -1 + 1 = 0$ .
  - Cas *iii* : (a)[3-12].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .  
 $D_{x,y} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\downarrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\downarrow$ .  
 $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = W_2^2(D_{x,y}) + W_2^2(D_{y,z}) = 1 - 1 = 0$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = W_2^2(D_{x',y'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = 0$ .
  - Cas *iv* : (a)[3-21].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .  
D'où  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = 0 = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z')$ .

• Cas du mouvement RIII(b) :  $\epsilon_x = \epsilon_{x'} = (+1)$ ,  $\epsilon_y = \epsilon_{y'} = (+1)$  et  $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = (-1)$ . Comme on vient de le voir, il y a essentiellement 6 configurations à examiner, représentées dans la figure ci-dessous

- Cas *i* : (b)[1-23].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .  
Dans ce cas, on a clairement  $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = \lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = 0$ .
- Cas *ii* : (b)[1-32].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .  
 $D_{x,y} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x,z} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y,z} = \uparrow\downarrow$  et  $D_{x',y'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{x',z'} = \uparrow\downarrow$ ,  $D_{y',z'} = \uparrow\downarrow$ .  
 $\lambda(x, y) + \lambda(x, z) + \lambda(y, z) = (+1)(-1)W_2^2(D_{x,z}) + (+1)(-1)W_2^2(D_{y,z}) = 0 + 1$  et  $\lambda(x', y') + \lambda(x', z') + \lambda(y', z') = (+1)(-1)W_2^2(D_{x',z'}) + (+1)(-1)W_2^2(D_{y',z'}) = 1 + 0$ .
- Cas *iii* : (b)[2-31].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .



$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,z}) - W_2^2(D_{y,z}) = \\ 1-1 = 0 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',z'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = \\ 0+0 = 0.$$

- Cas  $iv$  : (b)[2-13].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = W_2^2(D_{x,y}) - W_2^2(D_{y,z}) = -1-0 \\ \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = W_2^2(D_{x',y'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = 0-1.$$

- Cas  $v$  : (b)[3-12].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = W_2^2(D_{x,y}) - W_2^2(D_{y,z}) = 0+0 \\ \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = W_2^2(D_{x',y'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = (-1) - \\ (-1) = 0.$$

- Cas  $vi$  : (b)[3-21].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$\text{D'où } \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = 0.$$

• Mouvement RIII(c) :  $\epsilon_x = \epsilon_{x'} = (-1)$ ,  $\epsilon_y = \epsilon_{y'} = (+1)$  et  $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = (+1)$ .

On considère les 6 cas représentées dans la figure ci-dessous

- Cas  $i$  : (c)[1-23].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

$$\text{On a donc } \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = 0.$$

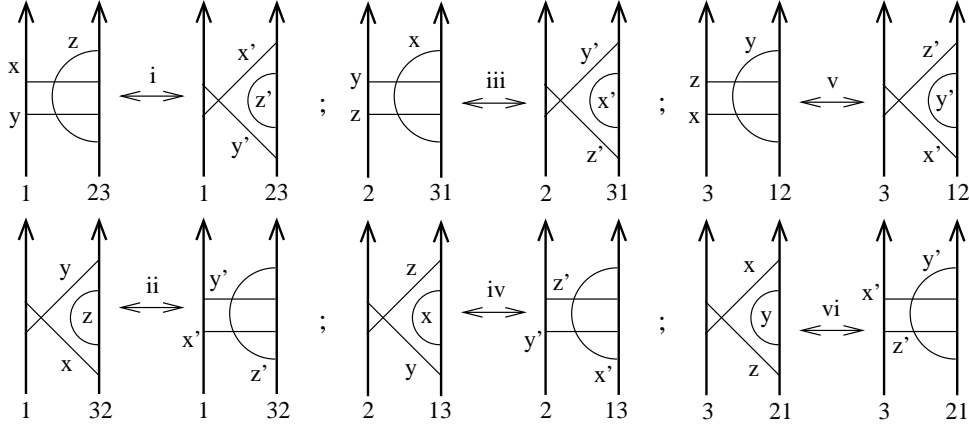
- Cas  $ii$  : (c)[1-32].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow.$$

$$\lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,z}) + W_2^2(D_{y,z}) = 0 \text{ et } \lambda(x',y') + \\ \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',z'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = -(-1) + (-1) = 0.$$

- Cas  $iii$  : (c)[2-31].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .





$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,z}) + W_2^2(D_{y,z}) = \\ -(-1) + 0 = 1 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',z'}) + \\ W_2^2(D_{y',z'}) = 0 + 1.$$

- Cas  $iv$  : (c)[2-13].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,y}) + W_2^2(D_{y,z}) = \\ 0 + 1 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',y'}) + W_2^2(D_{y',z'}) = \\ -(-1) + 0 = 1.$$

- Cas  $v$  : (c)[3-12].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,y}) + W_2^2(D_{y,z}) = \\ -(-1) + (-1) = 0 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',y'}) + \\ W_2^2(D_{y',z'}) = 0 + 0.$$

- Cas  $vi$  : (c)[3-21].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$\text{D'où } \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = 0.$$

- Mouvement RIII(d) :  $\epsilon_x = \epsilon_{x'} = (+1)$ ,  $\epsilon_y = \epsilon_{y'} = (-1)$  et  $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = (+1)$ .

- Cas  $i$  : (d)[1-23].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

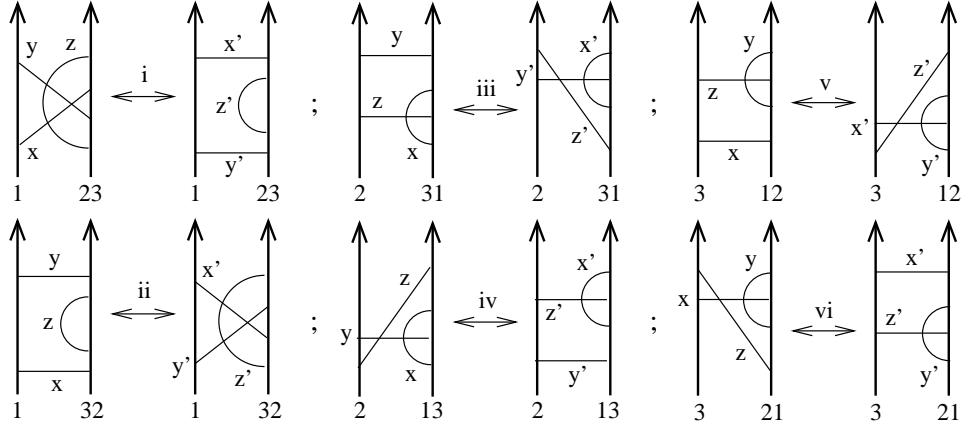
$$\lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = 0.$$

- Cas  $ii$  : (d)[1-32].  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow.$$

$$\lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = W_2^2(D_{x,z}) - W_2^2(D_{y,z}) = 0 - 0 \text{ et } \lambda(x',y') + \\ \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = W_2^2(D_{x',z'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = (-1) - (-1) = 0.$$

- Cas  $iii$  : (d)[2-31].  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .



$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = W_2^2(D_{x,z}) - W_2^2(D_{y,z}) = \\ 1 - 0 = 1 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = W_2^2(D_{x',z'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = \\ 0 - (-1) = 1.$$

- Cas  $iv : (d)[2-13]$ .  $\delta_x = \delta_{x'} = 0$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 0$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,y}) - W_2^2(D_{y,z}) = \\ -(-1) - 1 = 0 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',y'}) - \\ W_2^2(D_{y',z'}) = 0 - 0.$$

- Cas  $v : (d)[3-12]$ .  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 0$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$D_{x,y} = \uparrow\downarrow, D_{x,z} = \uparrow\downarrow, D_{y,z} = \uparrow\downarrow \text{ et } D_{x',y'} = \uparrow\downarrow, D_{x',z'} = \uparrow\downarrow, \\ D_{y',z'} = \uparrow\downarrow. \lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = -W_2^2(D_{x,y}) - W_2^2(D_{y,z}) = 0 - \\ (-1) = 1 \text{ et } \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = -W_2^2(D_{x',y'}) - W_2^2(D_{y',z'}) = \\ -(-1) - 0 = 1.$$

- Cas  $vi : (d)[3-21]$ .  $\delta_x = \delta_{x'} = 1$ ,  $\delta_y = \delta_{y'} = 1$ ,  $\delta_z = \delta_{z'} = 1$ .

$$\lambda(x,y) + \lambda(x,z) + \lambda(y,z) = \lambda(x',y') + \lambda(x',z') + \lambda(y',z') = 0.$$

Ceci achève de prouver que  $V_2$  est un invariant des string-links à deux cordes.

## Références

- [BN1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), 423-472.
- [BN2] D. Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, J. Knot Theory Ram. **4** (1995), 13-32.
- [BFK] D. Bar-Natan, J. Fulman, L.H. Kauffman, *An elementary proof that all spanning surfaces of a link are tube-equivalent*, J. Knot Theory Ram. **7** (1998), 873-879.
- [BC] J. Birman, R. Craggs, *The  $\mu$ -invariant of 3-manifolds and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed oriented 2-manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **237** (1978), 283-309.
- [B] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, GTM **139**, Springer-Verlag.
- [C1] T.D. Cochran, *Derivatives of link : Milnor's concordance invariants and Massey's products*, Mem. Amer. Math. Soc. **84** (1990), No. 427.
- [C2] T.D. Cochran, *Concordance invariance of coefficients of Conway's link polynomial*, Invent. Math. **82** (1985), 527-541.
- [CT] J. Conant, P. Teichner, *Grope cobordism of classical knots*, Topology **43** (2004), 119-156.
- [F] T. Fiedler, *Gauss Diagram Invariants for Knots and Links*, Mathematics and Its Applications **532** (2001).
- [FS] T. Fiedler, A. Stoimenow, *New knot and link invariants*, Proceedings of Knots in Hellas 98, (C. Gordon et al Ed.), Series on Knots and Everything **24** (2000), 59-79.
- [Fu] L. Funar, *On knots having the same Vassiliev invariants up to a certain degree*, prépublication (1999).
- [GGP] S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak, *Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds*, Geometry and Topology, **5** (2001), 75-108.
- [GL] S. Garoufalidis, J. Levine, *Tree-level invariants of 3-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, prépublication (1999) GT/9904106.
- [GT] S. Garoufalidis, P. Teichner, *On knots with trivial Alexander polynomial*, prépublication (2002) GT/0206023.
- [GA] F. Gonzalez-Acuna, *Dehn's construction on knots*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **15** (1970), 58-79.
- [G1] M. Goussarov, *Finite type invariants and  $n$ -equivalence of 3-manifolds*, Compt. Rend. Acad. Sc. Paris, **329** Série I (1999), 517-522.
- [G2] M. Goussarov, *Variations of knotted graphs. Geometric technique of  $n$ -equivalence*, St. Petersburg Math. J. , **12** (2001), no. 4, 569-604.

- [G3] M. Goussarov, *Interdependent modifications of links and invariants of finite degree*, Topology **37** (1998), no. 3, 595–602.
- [H] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geometry and Topology, **4** (2000), 1-83.
- [Ha1] N. Habegger, *Milnor, Johnson and tree-level perturbative invariants*, prépublication (2000).
- [Ha2] N. Habegger, *On Surgery Equivalence of Braids*, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, S. Firmo, D. Goncalves et O. Saeki Ed. (2000), 33-40.
- [HL] N. Habegger, X.S. Lin, *On link concordance and Milnor's  $\bar{\mu}$  invariants*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 419-428.
- [HM] N. Habegger, G. Masbaum *The Kontsevich integral and Milnor's invariants*, Topology **39** (2000), 1253-1289.
- [J1] D. Johnson, *Spin structures and quadratic forms on surfaces*, J. London Math. Soc. **22** (1980), No. 2, 365-373.
- [J2] D. Johnson, *Quadratic forms and the Birman-Craggs homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), No. 1, 235-254.
- [J3] D. Johnson, *An Abelian quotient of the mapping class group  $\mathcal{T}_g$* , Math. Ann. **249** (1980), 225-242.
- [J4] D. Johnson, *The structure of the Torelli group III : the Abelianization of  $\mathcal{T}$* , Topology **24** (1985), 127-144.
- [Ka] L. Kauffman, *The Conway polynomial*, Topology, **20** (1981), 101-108.
- [Ki] R.C. Kirby, *The topology of 4-manifolds*, LNM **1374**, Springer-Verlag (1991).
- [La] J. Lannes, *Sur les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3*, L'enseignement Math., **39** (1993), 295-316.
- [Lev1] J. Levine, *Homology cylinders : an enlargement of the mapping class group*, Alg. and Geom. Topology **1** (2001), 243-270.
- [Lev2] J. Levine, *Surgery on links and the  $\bar{\mu}$ -invariants*, Topology **26** (1987), 45-61.
- [Lin] X.S. Lin, *Power series expansions and invariants of links*, Geometric topology (W. Kazez, Ed.), Proc. Georgia Int. Topology Conf.1993, AMS/IP Studies in Adv. Math. (1997), 184-202.
- [MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Pure and Appl. Math., vol. XIII, Interscience, NY, 1966.
- [Ma] G. Massuyeau, *Spin borromean surgeries*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3991-4017.
- [MM] G. Massuyeau, J.B. Meilhan, *Characterization of  $Y_2$ -equivalence for homology cylinders*, J. Knot Theory Ram. **12** (2003), No. 4, 493-522.

- [Mt] S. Matveev, *Generalized surgery of three-dimensional manifolds and representation of homology spheres*, Math. Notices Acad. Sci. **42 :2** (1988), 651-656.
- [Me] B. Mellor, *Finite type link homotopy invariants II : Milnor's  $\bar{\mu}$ -invariants*, J. Knot Theory Ram. **9** (2000), No. 6, 735-758.
- [MN] H. Murakami, Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. , **283** (1989), 75-89.
- [O1] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, J. Knot Theory Ram. **5** (1996), 101-115.
- [O2] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants*, Series on Knots and Everything **29**.
- [PV] M. Polyak, O. Viro, *Gauss diagram formulas for vassiliev invariants*, Int. Math. Res. Notices **11** (1994), 445-453.
- [R] R.A. Robertello, *An invariant of knot cobordism*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 543-555.
- [Sa] N. Sato, *Cobordisms of semi-boundary links*, Topology Appl. **18** (1984), 225-234.
- [St] T. Stanford, *Vassiliev invariants and knots modulo pure braid subgroups*, prépublication (1998) **GT/9805092**.
- [S] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, Journal of Algebra **2** (1965), 170-181.
- [T] S.D. Tyurina, *Explicit formulas for the Vassiliev knot invariants*, prépublication (1999) **AT/9905161**.
- [V] V.A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its Applications (V.I. Arnold ed.) Amer. Math. Soc., Providence, 1990.